Devoir Maison 7
Continuité-dérivabilité, suites et polynômes

A faire pour le jeudi 13 février

Problème I - Continuité-dérivabilité

Partie 1 : Fifi à la classe

On définit

$$\varphi : \begin{array}{rcl}]-\pi;\pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\arctan(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que φ est continue sur $]-\pi;\pi[$.
2. Préciser la parité de φ.
3. Montrer que pour tout $x \in]-\pi;\pi[\setminus \{0\}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(2x)}{2(1+x^2)} - \arctan(x)\right)$.
4. En déduire un équivalent simple de $\varphi'(x)$ quand x tend vers 0, $x \neq 0$.
5. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ et préciser l'équation de sa tangente en 0.
6. Tracer l'allure du graphe de φ sur $]-\pi;\pi[$.

Partie 2 : Pour partir loin en un temps fini, il vaut mieux courir vite

Soit f une fonction dérivable sur $]-\pi;\pi[$ telle que $\lim\limits_{x\to-\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} f(x) = -\infty$ et $f(0) = 1$.

7. Montrer qu'il existe $(a,b) \in]-\pi;0[\times]0;\pi[$, tel que $\forall x \in]-\pi;a] \cup [b;\pi[$, $f(x) \leqslant 0$.
8. Montrer que $[0;1] \subset f\left(]-\pi;\pi[\right)$.
9. Montrer que f admet un maximum sur $]-\pi;\pi[$.
10. On suppose que f' est bornée sur $[0;\pi[$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [0;\pi[$, $|f'(x)| \leqslant M$.
    (a) Montrer que f est M-lipschitzienne sur $[0;\pi[$.
    (b) Conclure à une contradiction, que peut-on en déduire ?

Problème II - Suites numériques

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

Partie 1 : Commençons par faire fonctionner la fonction

1. Déterminer le tableau de variation complet de f' puis celui de f.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ puis la préciser.
3. (a) Démontrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}$. On le notera ℓ.
   (b) Vérifier que $\ell \in \left]1/2\,;\,1\right[$.
4. Démontrer que f est $\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}$-lipschitzienne sur $[1/2\,;\,1]$.
5. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

Partie 2 : Passons à la suite, cela va sans dire

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \left(x^2+1\right) \mathrm{e}^{-x} - 1 + \frac{1}{n}.$$

6. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_n\left(u_n\right) = 0.$$

7. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_n > 0$.
   (b) Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante.
   (c) Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge et déterminer sa limite.
8. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$-u_n + \ln\left(1+u_n^2\right) = \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

   (b) En déduire un équivalent simple de u_n puis de u_n^2.
   (c) En déduire un développement limité à l'ordre $\frac{1}{n^2}$ de u_n.
9. Il est clair que f définie une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par le théorème de la bijection et donc f^{-1} est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $J = \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{2\,\mathrm{e}^{-1}\right\}$.
   (a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et donner une expression de $\left(f^{-1}\right)'$ en fonction de f' et f^{-1}.
   (b) Justifier que $\left(f^{-1}\right)'$ est $\mathscr{C}^1$ sur J.
   (c) En déduire que f^{-1} admet un développement limité d'ordre 2 en 1. On notera a_0, a_1 et a_2 ses coefficients.
   (d) A l'aide de la question 5., déterminer ce développement limité.
   On pourra poser $u(x) = f(x) - 1$ donner son développement limité et utiliser le fait que $x = f^{-1}(1+u(x))$.
   (e) Retrouver alors le développement limité à l'ordre 2 de u_n.

Partie 3 : Pour terminer, récurez encore et encore

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = f(v_n).$$

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [1/2\,;\,1]$.

11. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\,|v_n - \ell|$.

12. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

13. Justifier que
$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + O\left(\left(\frac{1}{4\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n\right).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = v_{2n} \qquad \text{et} \qquad b_n = v_{2n+1}.$$

14. Démontrer que si g est une fonction décroissante sur un intervalle I alors $h = g \circ g$ est croissante sur I.

15. (a) Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
    (b) Quelle est sa limite ? En déduire sa monotonie.
    (c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Partie 4 : Quand Taylor et Cesàro s'en mêlent (facultatif)

On admet dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > \ell$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \ln(a_n - \ell).$$

On note également

$$\beta = (f \circ f)'(\ell).$$

16. Justifier que $\beta = f'(\ell)^2$ et que $\beta \in \,]0\,;\,1[$.

17. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \beta(a_n - \ell) + o(a_n - \ell).$$

18. En déduire proprement que
$$w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(\beta) + w_n + o(1).$$

19. A l'aide du lemme de Cesàro appliqué à la suite $(w_{k+1} - w_k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que
$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(\beta).$$

Problème III - Polynômes et suites numériques

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$(E) \qquad P\left(X^2-1\right) = P\left(X-1\right)P\left(X+1\right).$$

Partie 1 : Plantons des racines

1. Déterminer les polynômes constants solutions de (E).
2. Déterminer les polynômes de degré 1 solutions de (E).
3. On suppose pour toute la suite P non constant. On note $d = \deg(P)$. Quel théorème assure alors l'existence d'une racine de P dans $\mathbb{C}$?

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. On pose $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 2u_n.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une racine de P.

Partie 2 : Le coupable est un mono

On suppose dans cette partie que $a \in \mathbb{R}$ et on définit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+2x \end{array}$.

5. Préciser le tableau de variation de f puis justifier que $u_1 \in [-1;+\infty[$.
6. On suppose $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   (b) En déduire une contradiction à propos de P.
7. On suppose que $u_1 \in \,]-1;0[$.
   (a) Déterminer le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$.
   (b) En déduire la stricte monotonie, la convergence puis la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Retrouver la contradiction sur P.
8. Montrer que -1 n'est pas une racine de P. Que vaut u_1 ?
9. En déduire que l'unique racine réelle de P est 0.
10. On admet que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *(cf partie suivante pour les volontaires)*. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Partie 3 : Des racines imaginaires ? C'est Yggdrasil ? (facultatif)

Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + 1 = (a+1)^{2^n}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = |u_n+1|$.

12. Montrer que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite d'une suite géométrique dont on précisera la raison.
13. Discuter suivant les valeurs de $|a+1|$ la monotonie de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
14. En déduire que $|a+1| = 1$.
15. On démontre de même que $|a-1| = 1$, ce que l'on admet. A l'aide d'un schéma, en déduire une contradiction.