Correction du Devoir Maison 6
Analyse asymptotique, ensembles et applications

Du jeudi 23 janvier

Exercice I - Analyse asymptotique

Le but de ce problème n'est pas de donner une, ni deux, ni trois, ni quatre mais cinq méthodes pour déterminer le développement limité de la fonction tangente en 0 !

Tendons vers la tangente

1. La fonction tangente est $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction tangente est $\mathscr{C}^n$ en 0 et d'après le théorème de Taylor-Young admet donc un développement limité à l'ordre n en 0. En particulier pour $n = 5$,

$$\boxed{\text{la fonction tangente est } \mathscr{C}^5 \text{ donc admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.}}$$

Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de la fonction tangente i.e.

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

2. On sait que la fonction tangente est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le cours, on sait que **en** 0 *(très important)* son développement limité n'admet que des monômes de degré impair. Par conséquent,

$$\boxed{a_0 = a_2 = a_4 = 0.}$$

On obtient alors

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

3. On sait que $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ i.e. $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$. Or par troncature du développement précédent, on a

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + o(x).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\boxed{a_1 = 1.}$$

On admet dans toute la suite que

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right),$$

et l'on cherche à retrouver les valeurs de a_1, a_3, a_5.

Méthode 1 : Taylor est une brute

4. La fonction tan est cinq fois dérivable sur $U = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$. De plus sur U, on a

$$\tan' = 1 + \tan^2 .$$

Donc en posant $P_1 = X^2 + 1$, on a bien $\tan^{(1)} = P_1(\tan)$. Puis,

$$\begin{aligned}
\tan'' &= 2\tan'\tan = 2\left(1+\tan^2\right)\tan = 2\tan^3 + 2\tan \\
\tan^{(3)} &= \tan'\left(6\tan^2+2\right) = \left(\tan^2+1\right)\left(6\tan^2+2\right) = 6\tan^4+6\tan^2+2\tan^2+2 = 6\tan^4+8\tan^2+2 \\
\tan^{(4)} &= \tan'\left(24\tan^3+16\tan\right) \\
&= \left(\tan^2+1\right)\left(24\tan^3+16\tan\right) \\
&= 24\tan^5+16\tan^3+24\tan^3+16\tan \\
&= 24\tan^5+40\tan^3+16\tan \\
\tan^{(5)} &= \tan'\left(120\tan^4+120\tan^2+16\right) \\
&= \left(\tan^2+1\right)\left(120\tan^4+120\tan^2+16\right) \\
&= 120\tan^6+120\tan^4+16\tan^2+120\tan^4+120\tan^2+16 \\
&= 120\tan^6+240\tan^4+136\tan^2+16.
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$\boxed{P_1 = X^2+1, \qquad P_2 = 2X^3+2X, \qquad P_3 = 6X^4+8X^2+2}$$

et

$$\boxed{P_4 = 24X^5+40X^3+16X, \qquad P_5 = 120X^6+240X^4+136X^2+16,}$$

on a bien

$$\boxed{\forall k \in [\![1;5]\!], \qquad \tan^{(k)} = P_k \circ \tan .}$$

5. Puisque $0 \in U = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, on évalue les relations précédentes en 0. On a $\tan(0) = 0$. Donc pour tout $k \in [\![1;5]\!]$, $\tan^{(k)}(0) = P_k(\tan(0)) = P_k(0)$. Ainsi,

$$\tan'(0) = 1, \qquad \tan^{(2)}(0) = 0, \qquad \tan^{(3)}(0) = 2, \qquad \tan^{(4)}(0) = 0, \qquad \tan^{(5)}(0) = 16.$$

Or par la formule de Taylor-Young, puisque tan est $\mathscr{C}^5$ au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{5} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k \\
&\underset{x\to0}{=} \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{\tan^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{\tan^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{\tan^{(5)}(0)}{120}x^5 + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to0}{=} 0 + x + \frac{2x^3}{6} + \frac{16x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Méthode 2 : avec la réciproque, c'est sans équivoque

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) D'après le cours, on sait que

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n) \underset{u \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k + o(u^n).$$

   Donc en posant $u = x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on a

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x \to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2n}\right).}$$

   (b) On sait que la fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Donc par la question précédente et le théorème de primitivation des développements limités, on en déduit que

$$\begin{aligned}\arctan(x) &\underset{x \to 0}{=} \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \\ &\underset{x \to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).\end{aligned}$$

   Comme $\arctan(0) = 0$,

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)}$$

   ou encore

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

   Observez que l'on a que des monômes de degré impair, ce qui est normal car la fonction arctan *est impaire sur* $\mathbb{R}$.

   (c) En particulier si $n = 2$, on déduit de la question précédente que

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).}$$

7. D'après la partie précédente, on sait que

$$\tan(u) \underset{u \to 0}{=} a_1 u + a_3 u^3 + a_5 u^5 + o\left(u^5\right).$$

Posons $u = \arctan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
u &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).\\
u^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right) - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)\\
&= x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\\
u^3 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\\
&= x^3 - \frac{2x^5}{3} + o\left(x^5\right) - \frac{x^5}{3} + o\left(x^5\right)\\
&= x^3 - x^5 + o\left(x^5\right)\\
u^5 &= u^2u^3 = \left(x^2 - \frac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^3 - x^5 + o\left(x^5\right)\right)\\
&= x^5 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\arctan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} a_1 x & - a_1\frac{x^3}{3} && + a_1\frac{x^5}{5} && + o\left(x^5\right)\\
& + a_3x^3 && - a_3x^5 && + o\left(x^5\right)\\
& && + a_5x^5 && + o\left(x^5\right)\\
\underset{x\to 0}{=} a_1 x & + \left(a_3 - \frac{a_1}{3}\right)x^3 && + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 && + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\tan\left(\arctan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + o\left(x^5\right).}$$

8. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Or la fonction tan est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\circ\arctan$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après sa définition, la fonction arctan est la réciproque de la **restriction** de la fonction tangente à l'ensemble $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On sait que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \tan\left(\arctan(x)\right) = x}$.

   Attention l'inverse est faux ! $\arctan\left(\tan(x)\right) \neq x$ *en général.*

9. Des deux questions précédentes, on en déduit que

$$x \underset{x\to 0}{=} a_1x + \left(a_3 - \frac{a_1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + o\left(x^5\right).$$

   Donc par unicité des coefficient d'un développement limité, on a nécessairement

$$\begin{cases} a_1 = 1\\ a_3 - \frac{a_1}{3} = 0\\ \frac{a_1}{5} - a_3 + a_5 = 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a_1 = 1\\ a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}\\ a_5 = a_3 - \frac{a_1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.\end{cases}$$

   Conclusion, $\boxed{a_1 = 1}$, $\boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$, $\boxed{a_5 = \frac{2}{15}}$ et

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

Méthode 3 : quand sinus et cosinus prennent la tangente

10. D'après le cours, on sait que

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\\ \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right).\end{aligned}}$$

11. De la question précédente, on obtient

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\underset{x\to 0}{=}\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)}$$

Or $\frac{1}{1+u}\underset{u\to 0}{=}1-u+u^2-u^3+o\left(u^3\right)$. Donc en posant $u\underset{x\to 0}{=}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, on a

$$\begin{aligned}u &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\\ u^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{4}+o\left(x^5\right)\\ u^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)\left(\frac{x^4}{4}+o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)\\ o\left(u^3\right) &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{array}{lllll}\frac{1}{1+u} & \underset{x\to 0}{=} 1 & +\frac{x^2}{2} & -\frac{x^4}{24} & +o\left(x^5\right)\\ & & & +\frac{x^4}{4} & +o\left(x^5\right)\\ & & & & +o\left(x^5\right)\\ & \underset{x\to 0}{=} 1 & +\frac{x^2}{2} & +\frac{5x^4}{24} & +o\left(x^5\right)\end{array}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{2}+\frac{5x^5}{24}+o\left(x^5\right)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{12}+o\left(x^5\right)+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien encore une fois le résultat,

$$\boxed{\tan(x)\underset{x\to 0}{=}x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).}$$

Méthode 4 : laissons-nous dériver petit à petit

12. Par la question 3. on a $\tan(x)\underset{x\to 0}{=}x+o(x)$. Donc

$$1+\tan^2(x)\underset{x\to 0}{=}1+(x+o(x))^2\underset{x\to 0}{=}1+x^2+2xo(x)+o(x)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{1+\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+o\left(x^2\right).}$$

13. Par primitivation des développements limités, on déduit de la question précédente que

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0)+x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right).$$

Donc

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right).}$$

14. Donc en prenant ce nouveau développement limité de la fonction tangente, on trouve

$$\begin{aligned}
1+\tan^2(x) &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Alors par intégration des développements limités,

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0)+x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).$$

Finalement, pour la quatrième fois, on retrouve toujours le même résultat,

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).}$$

Méthode 5 : la méthode 5

15. On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-x^2+\frac{1+6+1}{24}x^4+o\left(x^4\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Par suite, on obtient,

$$\frac{1}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}.$$

On sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Posons $u(x)=-x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)$. On a alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
- $u(x) \underset{x\to 0}{=} -x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)$

- Puis,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)\right)\left(-x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} x^4+o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

- Puisque $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^4$, on obtient $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Dès lors,

$$\begin{array}{lllllll} \frac{1}{1+u} & \underset{x\to 0}{=} & 1 & +x^2 & -\frac{x^4}{3} & +o\left(x^4\right) \\ & & & & +x^4 & +o\left(x^4\right) \\ & & & & & +o\left(x^4\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} & 1 & +x^2 & +\frac{2x^4}{3} & +o\left(x^4\right). \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+o\left(x^4\right).}$$

16. On sait que la fonction tangente est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ (voisinage de 0). Donc par la question précédente et le théorème de primitivation des développements limités on obtient

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \tan(0)+x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).$$

Conclusion, on commence à être serein sur notre résultat, on obtient

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right).}$$

Exercice II - Ensembles et applications

Partie 1 : A faire avec application

Soit E un ensemble et $f \in \mathscr{F}(E,E)$ telle que $f\circ f = f$.

1. Supposons que f est injective. Montrons alors que $f=\mathrm{Id}_E$. Soit $x\in E$. Montrons donc que $f(x)=x$. Par définition, on a

$$f\circ f(x) = f(x).$$

Posons $y=f(x)$ alors,

$$f(y)=f(x).$$

Or par hypothèse, f est injective. Donc

$$y = x \qquad \text{i.e.} f(x)=x.$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in E$, on obtient que $f=\mathrm{Id}_E$. On a donc montré que

$$f \text{ injective} \qquad \Rightarrow \qquad f=\mathrm{Id}_E.$$

Réciproquement, si $f=\mathrm{Id}_E$, alors directement, f est bijective et donc notamment injective (ou encore pour tout $(x,y)\in E^2$, si $f(x)=f(y)$ alors $x=f(x)=f(y)=y$ et donc f est bien injective). Conclusion,

$$\boxed{f \text{ injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad f=\mathrm{Id}_E.}$$

2. On suppose que f est surjective. Montrons alors que $f = \mathrm{Id}_E$ i.e. $\forall x \in E,\ f(x) = x$. Soit $x \in E$. Puisque f est surjective, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = x$. Donc en composant par f, on obtient
$$f \circ f(u) = f(x).$$
Or par définition $f \circ f = f$. Donc
$$f(u) = f(x).$$
Or par définition de u, $f(u) = x$. D'où
$$x = f(u) = f(x).$$
Ceci étant vrai pour x quelconque dans E. On en déduit que $f = \mathrm{Id}_E$. On a donc établi que
$$f \text{ surjective} \qquad \Rightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_E.$$
Réciproquement, si $f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et donc surjective (ou encore pour tout $y \in E$, on a $y = f(y)$ donc y admet au moins un antécédent (lui-même) donc f est surjective). Conclusion,
$$\boxed{f \text{ surjective} \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_E.}$$

3. Prenons $E = \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$. Alors $f \circ f = f$ et pourtant $f \neq \mathrm{Id}_E$. (on pouvait aussi prendre $f : x \mapsto |x|$).
Autre exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto \frac{M+M^T}{2}$. Alors pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
$$f(f(M)) = \frac{f(M) + f(M)^T}{2} = \frac{\frac{M+M^T}{2} + \left(\frac{M+M^T}{2}\right)^T}{2} = \frac{\frac{M+M^T}{2} + \frac{M^T+M}{2}}{2} = \frac{M+M^T}{2} = f(M).$$
Donc $f \circ f = f$ mais $f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ (exemple si $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$, on a $f(M) = 0_n \neq M$).

Partie 2 : Des questions très sympas dans l'ensemble

On considère l'application suivante :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & (E \cap A) \cup B. \end{array}$$

4. On a
$$f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B = \emptyset \cup B = B,$$
et
$$f(A) = (A \cap A) \cup B = A \cup B,$$
et
$$f(B) = (A \cap B) \cup B.$$
Or $A \cap B \subset B$, donc $f(B) = B$. Enfin,
$$f(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cap A) \cup B = A \cup B.$$
Conclusion,
$$\boxed{f(\emptyset) = B, \qquad f(A) = A \cup B, \qquad f(B) = B, \qquad f(\mathbb{R}) = A \cup B.}$$

5. Si $A = \emptyset$. Alors, pour tout $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$
$$f(E) = (E \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B.$$
Dans ce cas, f est l'application constante :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & B. \end{array}}$$

6. Si $B = \mathbb{R}$. Alors pour tout $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$,
$$f(E) = (E \cap A) \cup B = (E \cap A) \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$
Dans ce cas, f est aussi une application constante :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & \mathbb{R}. \end{array}}$$

7. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $B \subset E \subset A \cup B$.
   (a) Soit $x \in E$. Puisque $E \subset A \cup B$, alors $x \in A \cup B$.
   Premier cas, si $x \in A$, alors comme on a aussi par définition $x \in E$ on obtient que $x \in E \cap A$. Donc $x \in (E \cap A) \cup B = f(E)$.
   Deuxième cas, si $x \notin A$, comme $x \in A \cup B$, alors $x \in B$. Donc $x \in (E \cap A) \cup B = f(E)$.
   Donc dans tous les cas, $x \in f(E)$. Conclusion,
   $$\boxed{(x \in E) \Rightarrow (x \in f(E)) \qquad \text{i.e.} \qquad E \subset f(E).}$$
   (b) Réciproquement, si $x \in f(E) = (E \cap A) \cup B$.
   Premier cas, si $x \in E \cap A$, alors $x \in E$.
   Deuxième cas, si $x \in B$. Par hypothèse, on a $B \subset E$, donc $x \in E$.
   Ainsi, dans tous les cas $x \in E$. D'où $(x \in f(E)) \Rightarrow (x \in E)$. Donc $f(E) \subset E$. Or par la question précédente, $E \subset f(E)$. Conclusion,
   $$\boxed{f(E) = E.}$$

8. Soit $E \in \operatorname{Im}(f)$. Autrement dit, E admet un antécédent par f : il existe $F \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $E = f(F) = (F \cap A) \cup B$. Dans ce cas, on obtient que
$$B \subset E.$$
Puis $F \cap A \subset A$. Donc $(F \cap A) \cup B \subset A \cup B$. D'où $E \subset A \cup B$. Conclusion,
$$\boxed{B \subset E \subset A \cup B.}$$

9. Soit $E \in \operatorname{Im}(f)$. Alors par la question précédente, $B \subset E \subset A \cup B$. Donc par la question 7. on en déduit que $E = f(E)$. Donc
$$\operatorname{Im}(f) \subset \{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E)\}.$$
Réciproquement soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $E = f(E)$. Alors E admet bien un antécédent par f (lui-même) donc E est dans l'image de f : $E \in \operatorname{Im}(E)$. Donc
$$\{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E)\} \subset \operatorname{Im}(f).$$
Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E)\}.}$$

10. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Posons $F = f(E)$. Alors $F \in \operatorname{Im}(f)$. Donc par la question précédente, $f(F) = F$. Autrement dit,
$$f(f(E)) = f(E).$$
Ceci étant vrai pour $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ quelconque, on en conclut que
$$\boxed{f \circ f = f.}$$

11. Par la question précédente, on a $f \circ f = f$. On en déduit donc de la partie 1 :
$$\begin{aligned} f \text{ est bijective} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est surjective} \\ f \text{ est injective} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} \\ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \qquad f(E) = E. \end{aligned}$$
En particulier, si $E = \emptyset$, on a
$$\emptyset = f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B = B.$$
D'autre part, $E = \mathbb{R}$, on a
$$bbR = f(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cap A) \cup B = A \cup B = A \cup \emptyset = A.$$
Donc si f est bijective, alors $A = \mathbb{R}$ et $B = \emptyset$. Réciproquement, si $A = \mathbb{R}$ et $B = \emptyset$, alors pour tout $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$,
$$f(E) = (E \cap \mathbb{R}) \cup \emptyset = E \cup \emptyset = E.$$
Donc $f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})}$ et donc f est bien bijective. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ est bijective} \qquad \Leftrightarrow \qquad A = \mathbb{R} \text{ et } B = \emptyset.}$$