Devoir Maison 6
Analyse asymptotique, ensembles et applications

A faire pour le jeudi 23 janvier

Exercice I - Analyse asymptotique

Le but de ce problème n'est pas de donner une, ni deux, ni trois, ni quatre mais cinq méthodes pour déterminer le développement limité de la fonction tangente en 0 !

Tendons vers la tangente

1. Justifier l'existence d'un développement à l'ordre 5 en 0 de la fonction tangente.

Soient $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de la fonction tangente i.e.

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

2. Justifier que certains coefficients sont nuls.

3. En utilisant l'équivalent usuel de la fonction tangente, déterminer proprement a_1.

On admet dans toute la suite que

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right),$$

et l'on cherche à retrouver les valeurs de a_1, a_3, a_5.

Méthode 1 : Taylor est une brute

4. Exprimer pour chaque $k \in [\![1;5]\!]$, $\tan^{(k)}$ sous la forme $P_k \circ \tan$ où P_k est un polynôme que l'on précisera.

5. En déduire le développement limité de la fonction tan en 0 à l'ordre 5.

Méthode 2 : avec la réciproque, c'est sans équivoque

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer un développement limité à l'ordre $2n$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ en 0.
   (b) Déterminer un développement limité à l'ordre $2n+1$ de la fonction arctan en 0.
   (c) Préciser alors le développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre 5.

7. Déterminer le développement limité de la fonction $\tan(\arctan(x))$ quand $x \to 0$ en fonction de a_1, a_3 et a_5.

8. Sur quel ensemble a-t-on $\tan(\arctan(x)) = x$?

9. En déduire les valeurs de a_1, a_3 et a_5 et exprimer le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Méthode 3 : quand sinus et cosinus prennent la tangente

10. Exprimer le développement limité en 0 de $x \mapsto \sin(x)$ et de $x \mapsto \cos(x)$ à l'ordre 5.

11. En déduire à nouveau le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Méthode 4 : laissons-nous dériver petit à petit

12. A l'aide de la question 3., déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$ en 0.

13. En déduire un développement limité d'ordre 3 de tangente en 0.

14. En réappliquant la même méthode, déterminer à nouveau le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Méthode 5 : la méthode 5

15. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$.

16. En déduire une dernière fois le développement limité de la fonction tangente en 0 à l'ordre 5.

Exercice II - Ensembles et applications

Partie 1 : A faire avec application

Soit E un ensemble et $f \in \mathscr{F}(E, E)$ telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$.

2. Montrer que f est surjective si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$.

3. Déterminer un ensemble E et une fonction $f \in \mathscr{F}(E, E)$ vérifiant $f \circ f = f$ mais telle que $f \neq \mathrm{Id}_E$.

Partie 2 : Des questions très sympas dans l'ensemble

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & (E \cap A) \cup B. \end{array}$$

4. Préciser $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(\mathbb{R})$.

5. Préciser f lorsque $A = \emptyset$.

6. Préciser f lorsque $B = \mathbb{R}$.

7. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $B \subset E \subset A \cup B$.
   (a) Soit $x \in E$, montrer que $x \in f(E)$, que peut-on en déduire ?
   (b) Montrer que $f(E) = E$.

8. Réciproquement, on suppose que $E \in \mathrm{Im}(f)$. Montrer que $B \subset E \subset A \cup B$.

9. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Im}(f) = \{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E)\}$.

10. Montrer que $f \circ f = f$.

11. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.