Colle du 24/03 - Sujet 1
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer le théorème de comparaison.

Exercice 1. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Exercice 2. Soient $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$ et $P_0,\dots,P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $k\in[\![0;n]\!]$, a est une racine de multiplicité d'ordre k exactement de P_k. Montrer que $\mathscr{B}=(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Colle du 24/03 - Sujet 2
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer l'existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définit par récurrence $T_0=1$, $T_1=X$ et pour tout $k\in[\![0;n-2]\!]$, $T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n$. Montrer que $(T_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ converge. En déduire que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. On suppose ici que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Démontrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ converge.

Colle du 24/03 - Sujet 3
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer la caractérisation de la somme directe par la base adaptée.

Exercice 1. Soient $F=\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $G=\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\mid \operatorname{tr}(M)=0\}$.

1. Déterminer la dimension de F et G.
2. Déterminer un supplémentaire **commun** à F et G.

Exercice 2. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\frac{1}{u_n}$.
Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(v_n^2\right)}{\ln\left(\frac{v_n+1}{v_n}\right)}$.