Colle du 10/03 - Sujet 1
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Montrer que la somme de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ converge puis calculer sa somme totale.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $f_k : x \mapsto \sin\left(2^k x\right)$. La famille $(f_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est-elle libre ?

Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 10/03 - Sujet 2
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Démontrer le théorème d'encadrement série-intégrale.

Exercice 1. Soit $F = \{\, P \in \mathbb{R}[X] \mid P - XP' = 0 \,\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.

1. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^p$.
2. On suppose $p = 1$. Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Colle de mathématiques PTSI 2024-2025

Colle du 10/03 - Sujet 3
Espaces vectoriels et séries

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation de deux espaces vectoriels en somme directe par l'intersection.

Exercice 1. Soit $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rl} x+y+z-t & = 0 \\ x-3y-2z & = 0 \end{array} \right\}$. Déterminer une base puis un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.