

Commentaires du DS3

Equations complexes, primitives, équation différentielles d'ordre 1

Les différences se creusent. Trop ont encore du mal à passer du « j'ai compris en classe » à « je sais faire seul devant ma feuille ». Seul un travail efficace de révision de ce que l'on voit ensemble au fur et à mesure vous permettra d'atteindre une bonne autonomie pour rentabiliser les questions.

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{60}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2	P3	Total	Note finale
Moyenne	-1,5	5,1	1,7	0,1	6,9	7,3	2,5	9,8	6,2	21,3	8,49
Sur		16	5	16	37	16	9	25	30	92	20

TOTAL : 92 pt

Problème I - **37 pt** Equations complexes

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $f : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az + 3 - i \end{matrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

En particulier, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = f \circ f(z) = f(f(z))$ etc.

On pose également,

$$z_n = f_n(2 + i).$$

Partie 1 : **16 pt** A l'ordre 1

1. **3 pt** Déterminer $a \in \mathbb{C}$ pour que $z_1 = 0$ et préciser la forme polaire du a obtenu.
Ok pas de difficulté pour trouver a . La forme polaire est généralement obtenue.
2. On suppose dans cette question que $a = i$.
 - (a) **2 pt** A quelle similitude correspond f ?
Peu traitée pourtant la question est très abordable et vue en interro.
 - (b) **2 pt** Calculer z_1 et $f(-1 + 3i)$.
Quelques erreurs de calcul persistent.
 - (c) **3 pt** Soient $A(-2i)$, $B(2 + i)$ et $C(-1 + 3i)$. Quelle est la nature de ABC ? Le tracer.
Le tracé est souvent bon, vous voyez souvent que ABC est isocèle rectangle mais peu de démonstrations. Quelques-unes néanmoins et bien faites.
3. **3 pt** Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble des complexes $a \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 \in \mathbb{R}$ puis tracer $\mathcal{D}$.
Peut traitée alors que l'on est sur une question traitée de nombreuses fois en classe.
4. **3 pt** Déterminer $\mathcal{C}$ l'ensemble des complexes $a \in \mathbb{C}$ tel que $z_1 \in \mathbb{U}$ puis tracer $\mathcal{C}$.
Encore moins abordée.

Partie 2 : 5 pt A l'ordre 2

5. 2 pt Déterminer les racines carrées de $U = -8 + 6i$.

Bien. Quelques imprécisions de rédaction pour certains.

6. 1 pt Préciser pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_2(z)$ et z_2 en fonction de a .

Correctement réussie dans l'ensemble.

7. 2 pt Déterminer l'ensemble des complexes $a \in \mathbb{C}$ tels que $z_2 = 2 + i$.

Il fallait reconnaître une équation du second degré et avoir réussie la question 5. Pas tant traitée que cela finalement car l'équation du second degré était un petit peu cachée mais quelques bonnes réponses.

Partie 3 : 16 pt A l'ordre n

On note $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ la fonction identité sur $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} \xrightarrow{\quad} \mathbb{C}$.

8. 3 pt Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(z) = a^n z + (3 - i) \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

Beaucoup moins traitée. Une simple récurrence suffisait.

On fixe pour la suite $n \in \mathbb{N}^*$.

9. 3 pt Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{C}$ tel que $z_n - f_n(0) = 3 - i$.

Plus simple que l'on ne croit mais très peu traitée également.

10. 2 pt Soit $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \in \mathbb{C}^4$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(\forall z \in \mathbb{C}, \quad \alpha z + \beta = \alpha' z + \beta') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases}.$$

Pratiquement non traitée.

11. 3 pt On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{U}_n$. Préciser alors f_n .

Idem

12. 2 pt Démontrer que

$$a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = \text{Id}_{\mathbb{C}}.$$

Idem

13. On suppose que $a \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$.

- (a) 1 pt Préciser z_n .

Non traitée.

- (b) 2 pt Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n : $m = qn + r$. Montrer que $z_m = z_r$.

Non traitée

Problème II - 25 pt Intégration

On fixe dans tout ce problème $I =]0; +\infty[$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in I, \quad F_n(x) = \int_1^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt.$$

Partie 1 : 16 pt Quelques calculs de F_k

1. **2 pt** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que F_n est une fonction bien définie sur I .

Un massacre. La rédaction est confuse la plupart du temps. La continuité n'est pas toujours énoncée.

2. **2 pt** Soit $x \in I$. Calculer $F_1(x)$.

Bien.

3. **2 pt** Soit $x \in I$. Calculer $F_2(x)$.

Bien également pour la majorité.

4. **2 pt** Soit $x \in I$. Calculer $F_3(x)$.

On fait apparaître du $t^2 + 1 - 1$ au numérateur, cela correspond à effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Quelques-uns y pensent bien. Mais quelques-uns seulement.

5. **2 pt** Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}.$$

Bien. Vous pensez bien à dire « il suffit » généralement.

6. **2 pt** Soit $x \in I$. Calculer $F_0(x)$.

Des lacunes de calculs persistent alors que la question n'est pas très dure. A bien reprendre en cas d'erreur.

7. **4 pt** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, calculer $F_n(x) + F_{n+2}(x)$. En déduire F_4 .

Beaucoup moins réussie. Vous ne simplifiez pas suffisamment votre résultat pour comprendre l'intérêt de cette question.

Partie 2 : 9 pt Applications

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_3(x) = x - \arctan(x) + \frac{\pi}{4} - 1.$$

8. **3 pt** Justifier l'existence puis calculer

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} t \arctan(t) dt.$$

Là encore l'existence n'est pas toujours très limpide. Plusieurs pensent bien à l'IPP. La rédaction est malheureusement trop souvent approximative. De plus, très souvent vous ne reconnaissez pas F_3 et vous recommencez son calcul au lieu d'invoquer directement la question 4.

9. **3 pt** Justifier l'existence puis calculer

$$B = \int_0^1 \frac{e^{3t}}{1 + e^{2t}} dt.$$

Même remarque, plusieurs voient bien le changement $s = e^t$ mais des problèmes de rédaction voire parfois de calcul et vous ne pensez pas toujours à reconnaître F_3 .

10. **3 pt** Justifier l'existence puis calculer

$$C = \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{1 + t} dt.$$

Idem mais moins traitée.

Problème III - 30 pt Equations différentielles d'ordre 1

On considère les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} (E^+) & \quad \forall x \in]0; +\infty[, \quad xy'(x) + (1-x)y(x) = x \\ (F) & \quad \forall x \in]0; +\infty[, \quad xy'(x) + (1-x)y(x) = x + \cos(x) \\ (E^-) & \quad \forall x \in]-\infty; 0[, \quad xy'(x) + (1-x)y(x) = x \\ (E) & \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad xy'(x) + (1-x)y(x) = x. \end{aligned}$$

- 2 pt** Justifier que la fonction $\lambda_1 : x \mapsto x e^{-x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
Ce problème commençait par le calcul de deux ensembles de primitives. Ces questions ont parfois été passées. Quelques bonnes réponses.
- 2 pt** Justifier que la fonction $\lambda_2 : x \mapsto \cos(x) e^{-x}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
Une deux bonnes réponses en passant par une double IPP. Pensez bien au passage dans les complexes, vous manquez encore de ce réflexe là.
- 3 pt** Préciser (E_0^+) l'équation différentielle homogène associée à (E^+) et déterminer $\mathcal{S}_0^+$ l'ensemble des solutions de (E_0^+) .
On donnera les solutions sous forme ensembliste et sous forme d'espace engendré.
Bien dans l'ensemble! Pensez à justifier $x \neq 0$ quand vous divisez par x .
- 3 pt** En déduire $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des solutions de l'équation (E^+) .
La rédaction est souvent perfectible au démarrage. Certains ont oublié de diviser le second membre par x au début. Plusieurs ont été empêché du fait de ne pas avoir réussi la question 1.
- 2 pt** Déterminer l'ensemble des solutions de

$$(\mathcal{P}) : \quad \begin{cases} y \text{ solution de } (E^+) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Quelques-uns citent bien le théorème de Cauchy. La rédaction ensuite manque souvent de solidité.

- 2 pt** Déterminer $\mathcal{S}_F$ l'ensemble des solutions de (F) .
Une poignée a vu le principe de superposition et s'est lancée dans sa résolution.
- 2 pt** En vous inspirant du résultat de la question 4., déterminer **une** solution de (E^-) .
Non comprise. Cf corrigé.
- 2 pt** En déduire $\mathcal{S}^-$ l'ensemble des solutions de (E^-) .
Non traitée.
- 3 pt** Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{e^x - 1}{x}$. En déduire selon les valeurs de $K \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{K e^x - 1}{x}.$$

La première limite oui. La seconde non. A revoir avec le corrigé pour la seconde.

10. **4 pt** Conclure en donnant l'ensemble des solutions de (E) .

Pour la dérivabilité de la solution en 0, on pourra admettre que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{-1 - \frac{e^x - 1}{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{2}$.

Non traitée.

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(G) \quad \forall x \in]0; +\infty[, \quad x \operatorname{sh}(x) z'(x) + [(1 - x) \operatorname{sh}(x) + x \operatorname{ch}(x)] z(x) = x.$$

11. **3 pt** Soit z une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$. On pose pour tout $x \in]0; +\infty[$, $y(x) = z(x) \operatorname{sh}(x)$. Justifier que y est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis montrer que z est solution de (G) si et seulement si y est solution d'une équation différentielle que l'on reconnaîtra.

Une ou deux bonnes réponses.

12. **2 pt** En déduire $\mathcal{S}_G$ l'ensemble des solutions de (G) .

Idem.