

Commentaires du DS1

Fonctions réelles, trigonométrie, bijections

Un ensemble très hétérogène. Certains ont de grosses lacunes non seulement en calcul mais aussi sur la compréhension ou juste l'apprentissage élémentaire des notions les plus classiques pourtant travaillées plusieurs fois en classe. D'autres s'en sortent globalement mais restent handicapés par quelques erreurs par-ci par-là qui plombent la progression dans le sujet et toutes les questions qui suivent. D'autres au contraire ont non seulement assimilé les méthodes mais ont aussi une belle aisance en calcul et engrangent alors rapidement des points.

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{70}\right)^{0,9} \times 20$.

	Soin	P1p1	P1p2	P1	P2p1	P2p2	P2p3	P2	P3	Total	Note finale
Moyenne	-2	13,2	3	16,3	5	0,7	0,2	6	8,3	28,5	8,86
Sur		26	11	37	16	12	7	35	23	95	20

TOTAL : 95 pt

Problème I - Fonctions réelles 37 pt

Un problème comprenant beaucoup de questions très accessibles et proches du cours. Cependant une erreur dans les premières questions pouvait avoir un impact important. D'où la nécessité de réfléchir à la cohérence de ses résultats et de vérifier ses calculs.

On considère les fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto \frac{x^2 + 3}{x + 1} \quad \text{et} \quad f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x + 4 \ln(1 + x).$$

Partie 1 : Etude de g 26 pt

1. 1 pt Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de g .

Pas de difficulté à part quelques imprécisions sur la rédaction : ne dites pas « g existe » mais fixez bien $x \in \mathbb{R}$ puis raisonnez par équivalents à partir de « $g(x)$ existe $\Leftrightarrow \dots$ ».

2. 1 pt En déduire que g n'est ni paire ni impaire.

La grande majorité a bien répondu. Une ou deux réponses de la forme $g(x) = \frac{x^2+3}{x+1} \neq \frac{x^2+3}{-x+1} = g(-x)$ donc g n'est pas paire. Il n'est pas du tout évident que $\frac{x^2+3}{x+1} \neq \frac{x^2+3}{-x+1}$. Démontrez toutes vos affirmations !

3. 2 pt Calculer la dérivée de g sur $\mathcal{D}$.

Beaucoup oublient de justifier que g est dérivable sur son domaine de définition. Dites-le en une phrase « g est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas » ensuite et seulement ensuite vous dérivez. Quelques erreurs de calcul malheureusement. Pour rappel :

Avant de...	il faut vérifier que...
diviser ou simplifier,	le terme est non nul ou garder la solution nulle à part.
dérivée,	la fonction est dérivable.
multiplier une inégalité,	le terme est positif ou changer le sens de l'inégalité.
simplifier $\sqrt{x^2}$,	le terme est positif ou garder des valeurs absolues.
composer une égalité	la fonction est injective ou n'écrire qu'une implication.
d'intégrer une fonction,	la fonction est continue.

4. **1 pt** Dresser le tableau de signe de g' sur $\mathcal{D}$.
Pas de difficulté. N'oubliez pas de vérifier votre résultat en faisant le produit des racines on doit trouver c/a et la somme $-b/a$.
5. **2 pt** Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
Il est nécessaire de justifier sa réponse. Vous ne pouvez pas juste vous permettre d'énoncer le résultat.
6. **2 pt** En déduire le tableau de variations complet de g .
N'oubliez pas de faire vos calculs AVANT d'écrire le tableau et non l'inverse. Soyez attentif à la cohérence de vos résultats. En cas d'incohérence, reprendre vos calculs précédents pour trouver votre erreur. Plusieurs belles réponses.
7. **1 pt** La fonction g a-t-elle un(des) minimum(s) local(locaux) ? Si oui préciser le(s)quel(s).
De la récitation de cours. Plusieurs ne connaissent pas la notion.
8. **1 pt** La fonction g a-t-elle un(des) minimum(s) global(globaux) ? Si oui préciser le(s)quel(s).
Idem. Une petite justification est nécessaire.
9. **2 pt** Résoudre dans $\mathcal{D}$ l'équation $g(x) = -\frac{21}{2}$.
Une simple petite question calculatoire. Il faut absolument travailler ce genre de questions car beaucoup d'entre vous sont mis en échec par ces calculs pourtant pas si importants que cela. N'oubliez pas de justifier que $x \neq -1$ quand vous simplifiez le quotient.
10. **3 pt** Préciser g ($] -1; 2[$) et g^{-1} ($[-\frac{21}{2}; -7]$).
Bien trop de mauvaises réponses pour une notion de cours, vu en TD et en interrogation. Preuve d'un manque de travail flagrant pour s'appropriier les notions du cours.
11. **1 pt** La fonction g est-elle injective ? Justifier.
Là aussi, du bon et du moins bon. Impossible de se tromper lorsque le cours a été appris.
12. **1 pt** La fonction g est-elle surjective ? Justifier.
Même remarque.
13. **2 pt** Préciser le comportement asymptotique de g en $+\infty$.
Plusieurs belles réponses. Justifiez toujours bien vos limites. Petit détail : dans votre factorisation par x dans la fraction, vous divisez par x et donc nécessairement il faut prendre $x \neq 0$. Une remarque importante sur les limites :

**IL EST INTERDIT DE PASSER A
LA LIMITE SUR UN MORCEAU.**

Par exemple ne jamais écrire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Si la conclusion est vraie ici, le procédé est faux en général. Par exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x = 0 \quad \text{ce qui est faux !}$$

En conséquence, il ne faut JAMAIS l'appliquer.

14. **1 pt** Préciser le comportement asymptotique de g en $-\infty$.
Généralement réussie lorsque la précédente l'a été.
15. **2 pt** Après avoir justifier son existence, calculer pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $\frac{g(-1+h)+g(-1-h)}{2}$.
Décevant pour l'existence. Il suffit de justifier que $-1+h$ et $1+h$ sont dans le domaine de définition de g . Là aussi le calcul pose encore trop de problème pour plusieurs alors qu'il n'y a aucune astuce. Il faut continuer à s'y entraîner.
16. **1 pt** En déduire que le graphe de g admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.
Quelques belles réponses montrant une bonne compréhension.
17. **2 pt** Tracer le graphe de g sur $\mathcal{D}$. On fera apparaître les différentes asymptotes.
Plutôt bien. Ne pas hésiter à prendre ses questions graphiques qui apportent souvent quelques points faciles.

Partie 2 : Etude de f **11 pt**

18. **1 pt** Déterminer U le domaine de définition de f .
OK mais à rédiger à minima.
19. **2 pt** Déterminer les limites de f aux bornes de U .
Là aussi, la rédaction manque parfois de justification, n'hésitez pas à détailler un peu pour gagner en rigueur.
20. **2 pt** A l'aide de la partie précédente, déterminer les variations de la fonction f .
Plusieurs ont bien reconnu la dérivée de f (que l'on obtient APRES avoir justifié que f est dérivable naturellement) mais des erreurs dans la partie précédente pouvaient impacter la solution.
21. **2 pt** Montrer que f définit une bijection de U dans un ensemble V à préciser.
Question facile... souvent mal rédigée!!! Ce n'est pas faute d'avoir insisté :
 - (a) On cite les hypothèses.
 - (b) ON CITE LE THEOREME.
 - (c) On conclut.
22. **2 pt** Déduire de 20. que pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln(1+x) > \frac{x(2-x)}{8}$.
Pas mal de bons éléments même si vous ne parvenez pas toujours à conclure.
23. **2 pt** En déduire que pour tout $x > 1$, $\ln(x+1) - \ln(x) > \frac{2x-1}{8x^2}$.
Peu de réponses.

Problème II - Trigonométrie **35 pt**

Un problème bien moins traité et souvent beaucoup moins abordé que ceux sur les fonctions. Il comprenait pourtant beaucoup de questions classiques.

Partie 1 : Une équation **16 pt**

On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E) \quad \cos(x) + \cos(3x) = \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. **3 pt** Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et un unique $\beta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\beta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Très peu de bonnes réponses. Il suffisait juste d'appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires/théorème de la bijection. A bien retravailler, il ne faut pas être si fragile face à un théorème si classique.

2. (a) **2 pt** Développer $\cos(3x)$.

Un ensemble de réponses correctes mais bien trop peu à mon goût pour une question déjà faite en classe! Il faut mieux retravailler les exemples et exos du cours.

- (b) **1 pt** En déduire que

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \cos^3(x) - \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{8} = 0.$$

Souvent réussie lorsque la question précédente l'a été.

3. (a) **2 pt** Factoriser $\cos(x) + \cos(3x)$.

Question de cours, impossible de se tromper...

- (b) **2 pt** En déduire à nouveau que $(E) \Leftrightarrow \cos^3(x) - \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{8} = 0$.

L'usage de la formule $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ n'est pas naturel pour beaucoup. A retravailler pour ceux qui ne l'ont pas réussie.

4. **2 pt** Déterminer trois réels $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$X^3 - \frac{X}{2} - \frac{1}{8} = \left(X + \frac{1}{2}\right)(aX^2 + bX + c).$$

Plusieurs belles réponses, certains sont à l'aise avec cette factorisation. Quelques-uns avaient la méthode mais se sont trompés dans le calcul.

5. **2 pt** Soient $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $x \in \mathcal{S}_E$. Déterminer les valeurs de $\cos(x)$.

On demandait ici juste les valeurs de $\cos(x)$ et non de x . La rédaction est souvent confuse. Bien établir le lien proprement entre X et $\cos(x)$.

6. **2 pt** Déterminer $\mathcal{S}_E$ en fonction de α et β définies à la question 1.

Peu traitée mais quelques succès.

Partie 2 : Calcul de S **12 pt**

Posons

$$\theta = \frac{\pi}{5} \quad \text{et} \quad S = \cos(\theta) + \cos(3\theta).$$

7. **2 pt** Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\cos(\theta)$.

Une ou deux bonnes réponses maximum. A bien retravailler avec le corrigé. Malheureusement, la suite dépendait beaucoup de ce résultat.

8. **2 pt** En déduire que $S > 0$.

Très peu traitée.

9. **2 pt** Exprimer $\cos(2023\theta)$ et $\cos(6\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\cos(\theta)$.

Certains ont su s'en sortir sans la question 7. mais cela n'aidait pas vraiment pour la suite.

10. **2 pt** Linéariser S^2 .

Quelques-uns commencent à linéariser avant... de développer ! Si vous développez vous faites marche arrière (aux erreurs de calcul près de surcroît).

11. **2 pt** En déduire que

$$S^2 + \frac{3}{2}S - 1 = 0.$$

Très peu de bonnes réponses.

12. **2 pt** Déterminer la valeur de S .

Facile même sans avoir réussi les questions d'avant ! Certains s'en sont bien saisi mais pas tous. Lisez bien un sujet intégralement avant de le commencer !

Partie 3 : Valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et applications **7 pt**

13. **2 pt** A l'aide des deux parties précédentes, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Une réponse qu'il faut bien rédiger. Quelques bonnes réponses.

14. **2 pt** En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Assez facile que l'on pouvait traiter aussi indépendamment des autres (avec le résultat donné dans l'énoncé de la question précédente). Bien justifier le passage de $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$!

15. **3 pt** Déterminer $\mathcal{S}_I$ l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ solutions de l'inéquation

$$(I) \quad 2 \cos(2x) + 4\sqrt{3} \sin(x) \cos(x) \leq 1 + \sqrt{5}.$$

Très peu traitée.

Problème III - Bijection **23 pt**

Que du déjà vu en classe et DM. Quelques bonnes copies mais beaucoup semblent découvrir l'approche ou bloquent sur les calculs ou pire ne connaissent leurs théorèmes qu'approximativement.

On définit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2e^x + 3}{e^x + 1}. \end{array}$$

1. **2 pt** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Facile, bien réussie. Vous pouvez poser $u = \dots$ et $v = \dots$ mais faites-le au brouillon seulement pour ne pas alourdir la rédaction car le correcteur lui dérivera directement.

2. **2 pt** En déduire le tableau de variation complet de f .

Pas de difficulté pour la monotonie. Les limites n'avaient pas de piège non plus mais il n'y a pas eu que des bonnes réponses.

3. **1 pt** Préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$.

Facile.

4. **1,5 pt** Justifier que le graphe de f admet une tangente en 0 et préciser son équation.

La justification est très rarement bonne. L'équation l'est bien plus. Question facile également.

5. **2 pt** Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble J à préciser.
L'usage du théorème de la bijection n'est pas toujours correcte y compris sur l'énoncé des hypothèses.
Pas d'apprentissage du cours, pas de point !
6. **2 pt** Préciser le tableau de variation de f^{-1} sur J . Comment obtient-on le graphe de f^{-1} en fonction de celui de f ?
Assez bien dans l'ensemble.
7. **2,5 pt** Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et exprimer pour tout $x \in J$, $(f^{-1})'(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$.
Cadeau, il suffit d'appliquer le théorème de la dérivée et pourtant peu de bonnes réponses bien rédigées...
8. **2 pt** Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $f^2(x) - 5f(x) + 6$.
Même remarque que pour toutes les autres questions avec un peu de calcul. Des succès mais aussi des échecs. Il faut persévérer.
9. **2 pt** En déduire pour $x \in J$, une expression de $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x .
Une ou deux belles réponses.
10. **2 pt** Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x-2}.$$

Même remarque car elle s'appuyait sur la précédente.

11. **2 pt** En déduire f^{-1} .
Peu traitée.
12. **2 pt** Retrouver le résultat précédent par une autre méthode.
Très peu traitée.