Banque PT - Maths B - 2023
Version pour juniors

Les parties en bleu avec astérisque ont été ajoutées ou modifiées par rapport sujet initial.

Dans cette épreuve, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Le sujet est composé de 4 parties. La partie 4 est indépendante du reste du sujet.

Première Partie.

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (*) Soit r l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice R.
   (a) Soit C_1, C_2, C_3 les trois vecteurs colonnes de R. Montrer que (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
   (b) On admet alors que r est une rotation de l'espace d'axe dirigé par un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ vérifiant $r(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et d'angle θ défini par $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(R)$ et $\sin(\theta)$ de même signe que $\det(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}, r(\overrightarrow{u}))$, pour $\overrightarrow{u}$ un vecteur quelconque non colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$.
   Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e_1}$ solution et un angle θ associé.

2. Calculer $A_1 = RDR^{-1}$ et l'exprimer à l'aide de la matrice A. Les calculs devront figurer sur la copie.

3. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A et f_1 celui associé à la matrice A_1.
   (a) Démontrer que f_1 est la composée commutative d'une symétrie s_1 et d'une projection p_1 dont on exprimera les matrices S_1 et P_1 dans la base canonique en fonction de R et de deux autres matrices diagonales à préciser.
   (b) La symétrie s_1 est-elle unique ?
   (c) La symétrie s_1 proposée à la question (a) est-elle orthogonale ?

4. (a) Justifier à l'aide des résultats précédents que la matrice A est diagonalisable i.e. semblable à une matrice diagonale. ~~Préciser ses valeurs propres.~~
   (b) Justifier que f est la composée de trois transformations simples que l'on précisera.
   (c) Démontrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice B i.e. qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Préciser λ.

(d) Justifier que la matrice Q est inversible.

(e) Sans calculer Q^{-1}, ~~ni le polynôme caractéristique de la matrice B~~, démontrer que $B = QDQ^{-1}$.

(f) Démontrer que les matrices A_1 et B sont semblables. On mettra en évidence la relation entre ces deux matrices.

Deuxième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on considère la fonction vectorielle $f_{a,b,c}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{a,b,c}(t) = \begin{pmatrix} b\,\mathrm{e}^t + c\,\mathrm{e}^{-t} \\ 2a - b\,\mathrm{e}^t \\ a + c\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

On note F l'ensemble des fonction $f_{a,b,c}$ lorsque (a, b, c) parcourt $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C}_{a,b,c}$ la courbe correspondante à l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $f_{a,b,c}(t)$ quand t parcourt $\mathbb{R}$.
Enfin, les matrices B et Q sont celles qui ont été définies dans la première partie.

1. Démontrer que F est un espace vectoriel dont on précisera une base et la dimension.

2. Démontrer que tout élément f de F vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = Bf(t)$$

où $f'(t)$ désigne la dérivée de la fonction f.

3. Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_{a,b,c}$ sont planes et qu'il est possible de choisir des plans qui les contiennent qui soient tous parallèles.

4. On considère la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de passage de la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est la matrice Q.

(a) Exprimer chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

(b) Justifier qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{C}_{a,b,c}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est

$$\begin{cases} X(t) = a \\ Y(t) = b\,\mathrm{e}^t \\ Z(t) = c\,\mathrm{e}^{-t} \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

(c) En déduire que chaque courbe $\mathcal{C}_{a,b,c}$ est incluse dans la courbe d'équation $\begin{cases} YZ = bc \\ X = a \end{cases}$ (i.e. une hyperbole d'équation $YC = bc$ incluse dans le plan $X = a$).

Troisième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Dans cette partie, on note $\mathcal{C}$ la courbe $\mathcal{C}_{1,1,1}$ définie dans la partie précédente.

Une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donc : $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^t \\ z(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$

On note $M(t)$ le point de $\mathcal{C}$ de paramètre t.

1. Déterminer une représentation paramétrique et des équations cartésiennes de la tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(\ln(2))$ i.e. la droite passant par $M(\ln(2))$ et de vecteur directeur $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(\ln(2))$.

2. Soit T un réel strictement positif. On note $L(T) = \int_0^T \left\| \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) \right\| \mathrm{d}t$ la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ entre les points $M(0)$ et $M(T)$.

   (a) Etablir que pour tout $t \geqslant 0$, $2\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)^2 \leqslant \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 \leqslant 2\,\mathrm{e}^{2t}$.

   (b) En déduire un encadrement de $L(T)$ puis un équivalent de $L(T)$ lorsque T tend vers $+\infty$.

3. Soit Σ la surface d'équation $x^2 - (y-2)^2 - (z-1)^2 = 2$ et Ω le point de coordonnées $(0, 2, 1)$.
   Pour tout réel α, on note Π_α le plan d'équation $x = \alpha$.

   (a) Montrer que $\mathcal{C} \subset \Sigma$.

   (b) (*) Déterminer une équation du plan tangent en $M(\ln(2))$ à Σ i.e. le plan passant par $M(\ln(2))$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2x(\ln(2)) \\ -2(y(\ln(2))-2) \\ -2(z(\ln(2))-1) \end{pmatrix}$.

   (c) Déterminer la nature de la courbe $\Lambda_\alpha = \Sigma \cap \Pi_\alpha$ lorsque $|\alpha| \geqslant \sqrt{2}$. On précisera ses éléments caractéristiques.
   Qu'en est-il lorsque $|\alpha| < \sqrt{2}$?

   (d) (*) Justifier soigneusement que Σ est l'union de cercles coaxiaux dont on précisera l'axe Δ.

   (e) (*) ~~Rappeler la définition d'une méridienne pour une surface de révolution.~~

   (f) (*) Dessiner l'allure de la courbe d'équations $\begin{cases} x^2 - (y-2)^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases}$.

   (g) Sur la feuille de papier millimétré ~~fournie~~ (ben non) tracer l'allure de Σ dans le repère $\left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
   Il est conseillé d'orienter $\vec{i}$ vers le haut.

   (h) La surface de révolution obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de Δ est-elle égale à Σ ?

Quatrième Partie.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \\ y(t) = 2 - \mathrm{e}^t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

On note $A(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1. Etablir les tableaux de variation des fonctions x et y. On précisera les limites aux bornes.

2. Déterminer la tangente à Γ au point $A(0)$ i.e. la droite passant par $A(0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{OA}'(0)$.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses et préciser un vecteur directeur et une équation cartésienne de la tangente à Γ en ce point.

4. (*) Déterminer l'équation de l'asymptote à Γ lorsque le paramètre t tend vers $-\infty$.

5. (*) Calculer $a = \lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ puis $b = \lim_{t \to +\infty} y(t) - ax(t)$ et en déduire qu'au voisinage de $+\infty$, Γ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont on précisera l'équation.

   Préciser la position relative de Γ et $\mathcal{D}$.

6. Dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracer la courbe Γ, les tangentes et asymptotes déterminées dans les questions précédentes.

   Unité : 3cm.

   ~~On utilisera pour cela la deuxième feuille de papier millimétré fournie.~~ Hé non toujours pas.

7. On note $B(t)$ le point de $\mathcal{D}$ ayant la même abscisse que $A(t)$ où $A(t)$ est le point de Γ de paramètre t.

   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la longueur $d(t) = A(t)B(t)$.

   (b) Les séries $\sum_{n \geqslant 0} d(n)$ et $\sum_{n \geqslant 1} d(\ln(n))$ sont-elles convergentes ?

   Si oui, préciser leur somme.

   (c) On note S la partie du plan incluse entre la restriction de la courbe Γ à $\mathbb{R}_+$, la droite $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $x = 2$.

   La partie S est-elle d'aire finie ?

Fin de l'épreuve