Colle du 14/02 - Sujet 1
Diagonalisation

Question de cours. Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et λ_1, λ_2, λ_3 trois valeurs propres distinctes de f. On suppose que pour $i \in \{1,2,3\}$, v_i est un vecteur propre associé à λ_i. Que dire de la famille (v_1, v_2, v_3) ? Le démontrer.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = \left(X^2+1\right)P'' - 2XP$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et écrire M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire les valeurs propres de f.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} & = 3u_n - 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = -v_n + w_n. \end{cases}$$

Déterminer une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Colle de mathématiques BCPST2 2017-2018

Colle du 14/02 - Sujet 2
Diagonalisation

Question de cours. Soit $P = X^3 - 3X^2 + 2X$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $P(A)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des matrices diagonalisables n'ayant qu'une seule valeur propre. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. Soient f_1, f_2, f_3, f_4 quatre éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{3x}, \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad f_3(x) = \sin(x), \qquad f_4(x) = \cos(x).$$

On pose $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
2. Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose T_h l'application

$$T_h : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$f \mapsto T_h(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+h) \end{array}$$

   Montrer que T_h est un endomorphisme de E.
3. Déterminer M la matrice de T_h dans la base $\mathscr{B}$.
4. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

Colle du 14/02 - Sujet 3
Diagonalisation

Question de cours. Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de E_1 le sous-espace propre associé à λ_1 et $(v_1, \dots, d_q)$ une base de E_2 le sous-espace associé à λ_2. Que dire de la famille $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$? Le démontrer.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice A est diagonalisable pour déterminer P une matrice inversible et D une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et Φ l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM - MA. \end{aligned}$$

On pose $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice T de Φ dans la base $\mathscr{B}$. Justifier que cette matrice est diagonalisable.
2. Calculer $T^3 - 4T$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de T ?
3. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $T = PDP^{-1}$.

Colle du 14/02 - Sujet 1
Diagonalisation

Question de cours. Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et λ_1, λ_2, λ_3 trois valeurs propres distinctes de f. On suppose que pour $i \in \{1, 2, 3\}$, v_i est un vecteur propre associé à λ_i. Que dire de la famille (v_1, v_2, v_3) ? Le démontrer.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $f(P) = \left(X^2 + 1\right) P'' - 2XP$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et écrire M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire les valeurs propres de f.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = v_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} & = 3u_n - 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = -v_n + w_n. \end{cases}$$

Déterminer une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Colle du 14/02 - Sujet 2
Diagonalisation

Question de cours. Soit $P = X^3 - 3X^2 + 2X$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $P(A)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des matrices diagonalisables n'ayant qu'une seule valeur propre. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. Soient f_1, f_2, f_3, f_4 quatre éléments de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définis pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{3x}, \qquad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad f_3(x) = \sin(x), \qquad f_4(x) = \cos(x).$$

On pose $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de E.
2. Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose T_h l'application

$$T_h : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$
$$f \mapsto T_h(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+h) \end{array}$$

   Montrer que T_h est un endomorphisme de E.
3. Déterminer M la matrice de T_h dans la base $\mathscr{B}$.
4. La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui la diagonaliser.

Colle du 14/02 - Sujet 3
Diagonalisation

Question de cours. Soient E un espace vectoriel, f un endomorphisme de E et λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de f. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de E_1 le sous-espace propre associé à λ_1 et $(v_1, \ldots, d_q)$ une base de E_2 le sous-espace associé à λ_2. Que dire de la famille $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$? Le démontrer.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice A est diagonalisable pour déterminer P une matrice inversible et D une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et Φ l'application :

$$\Phi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$
$$M \mapsto AM - MA.$$

On pose $\mathscr{B} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice T de Φ dans la base $\mathscr{B}$. Justifier que cette matrice est diagonalisable.
2. Calculer $T^3 - 4T$. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de T ?
3. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $T = PDP^{-1}$.