Colle du 06/02 - Sujet 1
Diagonalisation

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que pour tout $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, on a

$$f(P) = a_0 + 4a_1 + 2a_2 - (3a_1 + 2a_2)\, X + 4\,(a_1 + a_2)\, X^2.$$

On pose $(P_1, P_2, P_3) = \left(2X, 1, X^2 + 1\right)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner les coordonnées de 1, X et X^2 dans $\mathscr{B}$.
3. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(f)$, où $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(f)$ et vérifier la formule de changement de base.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche les matrices $B \in \mathscr{M}_2\,(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

1. Montrer qu'il existe D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Montrer que si $B^2 = A$, alors $B_1 = P^{-1}BP$ et D commutent.
3. En déduire B_1 puis B.

Colle du 06/02 - Sujet 2
Diagonalisation

Question de cours. Soit x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 6y(t). \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de x et de y.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ définit pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = (2X+1)\,P - \left(X^2 - 1\right) P'$.

1. Déterminer M la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de M.
3. Déterminer les sous-espaces propres associés.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}MP$.
5. En déduire M^n.

Colle du 06/02 - Sujet 3
Diagonalisation

Question de cours. On considère une population de coccinelle dont gène est présent sous deux allèles g et G distincts. Les coccinelles sont alors du type GG, Gg ou gg. On s'intéresse à une lignée de coccinelle où à chaque génération, l'individu est associé à un individu de type Gg. Déterminer la matrice de passage de la chaîne de Markov associée et déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$.
4. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Colle du 06/02 - Sujet 1
Diagonalisation

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, on a

$$f(P) = a_0 + 4a_1 + 2a_2 - (3a_1 + 2a_2)\,X + 4\,(a_1 + a_2)\,X^2.$$

On pose $(P_1, P_2, P_3) = \big(2X, 1, X^2 + 1\big)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner les coordonnées de 1, X et X^2 dans $\mathscr{B}$.
3. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(f)$, où $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\,(f)$ et vérifier la formule de changement de base.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche les matrices $B \in \mathscr{M}_2\,(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

1. Montrer qu'il existe D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
2. Montrer que si $B^2 = A$, alors $B_1 = P^{-1}BP$ et D commutent.
3. En déduire B_1 puis B.

Colle du 06/02 - Sujet 2
Diagonalisation

Question de cours. Soit x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 6y(t). \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de x et de y.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ définit pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = (2X+1)\,P - \left(X^2 - 1\right)P'$.

1. Déterminer M la matrice de f dans la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de M.
3. Déterminer les sous-espaces propres associés.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}MP$.
5. En déduire M^n.

Colle du 06/02 - Sujet 3
Diagonalisation

Question de cours. On considère une population de coccinelle dont gène est présent sous deux allèles g et G distincts. Les coccinelles sont alors du type GG, Gg ou gg. On s'intéresse à une lignée de coccinelle où à chaque génération, l'individu est associé à un individu de type Gg. Déterminer la matrice de passage de la chaîne de Markov associée et déterminer les valeurs propres de cette matrice.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$.
4. En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.