Colle du 31/01 - Sujet 1
Bases et matrices

Question de cours. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par

$$u(e_1) = e_1 - e_2 + 2_3 \qquad u(e_2) = -3e_1 + 2e_2 - e_3 \qquad u(e_3) = -7e_1 + 4e_2 + e_3.$$

Déterminer la matrice de u dans la base canonique et déterminer $\mathrm{rg}(u)$.

Exercice 1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P + P'. \end{aligned}$$

1. Déterminer M la matrice de u dans la base canonique.
2. Justifier que u est bijective et calculer M^{-1}.
3. Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant

$$P + P' = X^2 + X + 1.$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire une comparaison entre la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et celle $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \in \{1; 2\}$.
4. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2$ alors il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 1$ alors il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Colle du 31/01 - Sujet 2
Bases et matrices

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques puis déterminer son noyau.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P'. \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice de D relativement à la base canonique.
2. On pose $\Gamma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n$. Montrer que Γ est inversible et déterminer Γ^{-1}.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On pose $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer T la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Colle du 31/01 - Sujet 3
Bases et matrices

Question de cours. On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$f(P) = 8P + (X-5)P' + (X - X^2)P'' + 3X.$$

Déterminer la matrice de P dans la base canonique.

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^4\right)$ définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\to \mathbb{R}^4 \\ P &\mapsto (P(0), P'(1), P''(2), P'''(3)) \, . \end{aligned}$$

1. Déterminer M la matrice de f relativement aux bases canoniques.
2. Justifier que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Exprimer $P'(0)$ et $P''(0)$ en fonction de $P'(1)$, $P''(2)$ et $P'''(3)$.

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme associé à A dans la base $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$. On définit $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ par

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = f(e_1) \qquad v_3 = e_3 \qquad v_4 = f(e_3) \, .$$

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ et $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4.
3. En déduire $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
4. Déterminer $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$.
5. Retrouver alors le calcul de B par une autre méthode.

Colle du 31/01 - Sujet 4
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On considère $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $\mathscr{E}$ est libre.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f\left(\mathrm{Ker}\,(f \circ g)\right).$$

Exercice 2. On considère $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions cosinus hyperbolique ch et sinus hyperbolique sh pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On note $H = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ et $F = \{\, f \in H \mid f(\ln(2)) = 0 \,\}$.

1. Déterminer la dimension de H.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. Soit $\phi : H \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $f \in H$ par $\phi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Colle du 31/01 - Sujet 1
Bases et matrices

Question de cours. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par

$$u(e_1) = e_1 - e_2 + 2_3 \qquad u(e_2) = -3e_1 + 2e_2 - e_3 \qquad u(e_3) = -7e_1 + 4e_2 + e_3.$$

Déterminer la matrice de u dans la base canonique et déterminer $\mathrm{rg}(u)$.

Exercice 1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini par

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P + P'. \end{aligned}$$

1. Déterminer M la matrice de u dans la base canonique.
2. Justifier que u est bijective et calculer M^{-1}.
3. Déterminer l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifiant

$$P + P' = X^2 + X + 1.$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire une comparaison entre la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et celle $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \in \{1; 2\}$.
4. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 2$ alors il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 1$ alors il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Colle du 31/01 - Sujet 2
Bases et matrices

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques puis déterminer son noyau.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned} D : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P'. \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice de D relativement à la base canonique.
2. On pose $\Gamma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n$. Montrer que Γ est inversible et déterminer Γ^{-1}.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On pose $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer T la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
3. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Colle du 31/01 - Sujet 3
Bases et matrices

Question de cours. On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ défini pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$f(P) = 8P + (X-5)P' + (X-X^2)P'' + 3X.$$

Déterminer la matrice de P dans la base canonique.

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}^4\right)$ définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\to \mathbb{R}^4 \\ P &\mapsto (P(0), P'(1), P''(2), P'''(3)) . \end{aligned}$$

1. Déterminer M la matrice de f relativement aux bases canoniques.
2. Justifier que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Exprimer $P'(0)$ et $P''(0)$ en fonction de $P'(1)$, $P''(2)$ et $P'''(3)$.

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme associé à A dans la base $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$. On définit $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ par

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = f(e_1) \qquad v_3 = e_3 \qquad v_4 = f(e_3) .$$

1. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ et $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4.
3. En déduire $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
4. Déterminer $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$.
5. Retrouver alors le calcul de B par une autre méthode.