Colle du 24/01 - Sujet 1
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose f injective et on considère $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que si $\mathscr{E}$ est libre alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ l'est également.

Exercice 1. Soient f, $g : \mathbb{R}_[X] \to \mathbb{R}[X]$ les applications définies pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par

$$f(P) = P' \qquad \text{et} \qquad g(P) = XP.$$

Montrer que f et g sont des endomorphisme et calculer $f \circ g - g \circ f$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère trois endomorphismes de E f, g et h tels que

$$f = g \circ h \qquad g = h \circ f \qquad h = f \circ g.$$

1. Comparer les noyaux et les images de ces endomorphismes.
2. Vérifier que $f^2 = g^2 - h^2$.
3. En calculant de deux manières différentes $h^2 \circ f \circ h^2$, montrer que $f^5 = f$.

Colle du 24/01 - Sujet 2
Algèbre linéaire

Question de cours. Démontrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note f^k la composée k-ième de f : $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.
2. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$.

Exercice 2. On considère $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions cosinus hyperbolique ch et sinus hyperbolique sh pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On note $H = \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ et $F = \{ f \in H \mid f(\ln(2)) = 0 \}$.

1. Déterminer la dimension de H.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. Soit $\phi : H \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $f \in H$ par $\phi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Colle du 24/01 - Sujet 3
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On considère $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $\mathscr{E}$ est libre.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \alpha_n \mathrm{Id}_n + \beta_n f$ et les déterminer.

Colle du 24/01 - Sujet 1
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose f injective et on considère $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que si $\mathscr{E}$ est libre alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ l'est également.

Exercice 1. Soient f, $g : \mathbb{R}_[X] \to \mathbb{R}[X]$ les applications définies pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par

$$f(P) = P' \qquad \text{et} \qquad g(P) = XP.$$

Montrer que f et g sont des endomorphisme et calculer $f \circ g - g \circ f$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On considère trois endomorphismes de E f, g et h tels que

$$f = g \circ h \qquad g = h \circ f \qquad h = f \circ g.$$

1. Comparer les noyaux et les images de ces endomorphismes.
2. Vérifier que $f^2 = g^2 - h^2$.
3. En calculant de deux manières différentes $h^2 \circ f \circ h^2$, montrer que $f^5 = f$.

Colle du 24/01 - Sujet 2
Algèbre linéaire

Question de cours. Démontrer que la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \sin(x))$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note f^k la composée k-ième de f : $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subseteq \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$.
2. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}\left(f^{p+1}\right)$.

Exercice 2. On considère $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions cosinus hyperbolique ch et sinus hyperbolique sh pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On note $H = \operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ et $F = \{ f \in H \mid f(\ln(2)) = 0 \}$.

1. Déterminer la dimension de H.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
3. Déterminer une base et la dimension de F.
4. Soit $\phi : H \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $f \in H$ par $\phi(f) = (f(-\ln(2)), f(\ln(2)))$. Montrer que ϕ est un isomorphisme.

Colle du 24/01 - Sujet 3
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On considère $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $\mathscr{E}$ est libre.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1}.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \alpha_n \mathrm{Id}_n + \beta_n f$ et les déterminer.