Colle du 17/01 - Sujet 1
Algèbre linéaire

Question de cours. Démontrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P-(X+1)\,P'. \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire et déterminer Ker (φ) et Im (φ).

Exercice 2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & \varphi(y) : x \mapsto y'(x)+x^2y(x). \end{array}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer Ker (φ).
3. Montrer que φ est surjective.

Colle du 17/01 - Sujet 2
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient u et v deux suites géométriques de raison q et r respectivement. Justifier que

$$CL : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda,\mu) & \mapsto & \lambda u+\mu v \end{array}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire. La fonction CL est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 1. Soit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+z,y+z,0)\,. \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire et déterminer Ker (φ) et Im (φ).

Exercice 2. Soit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \left(X^2-1\right)P''+XP'-4P. \end{array}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$. Déterminer deg $(\varphi(P))$.
3. En déduire Ker (φ).

Colle du 17/01 - Sujet 3
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des espaces vectoriels.

Exercice 1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$f_\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z)\,. \end{array}$$

Montrer que f_α est linéaire et déterminer en fonction de α, $\operatorname{Ker}(f_\alpha)$ et $\operatorname{Im}(f_\alpha)$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & P - (X + 1) P'. \end{array}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Montrer que si $\deg(P) \geqslant 1$ alors P possède une infinité de racines et aboutir à une contradiction.
3. En déduire $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
4. Démontrer que $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq C_{n+1}[X]$.

Colle du 17/01 - Sujet 1
Algèbre linéaire

Question de cours. Démontrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P - (X + 1) P'. \end{array}$$

Montrer que φ est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Exercice 2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \\ y & \mapsto & \varphi(y) : x \mapsto y'(x) + x^2 y(x). \end{array}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi)$.
3. Montrer que φ est surjective.

Colle du 17/01 - Sujet 2
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient u et v deux suites géométriques de raison q et r respectivement. Justifier que

$$\begin{aligned} CL : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda u + \mu v \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire. La fonction CL est-elle surjective ? Injective ?

Exercice 1. Soit

$$\varphi : \begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (x + z, y + z, 0) . \end{aligned}$$

Montrer que φ est linéaire et déterminer Ker (φ) et Im (φ).

Exercice 2. Soit

$$\varphi : \begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto \left(X^2 - 1\right) P'' + XP' - 4P. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0$. Déterminer $\deg\left(\varphi(P)\right)$.
3. En déduire Ker (φ).

Colle du 17/01 - Sujet 3
Algèbre linéaire

Question de cours. Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que Ker (f) et Im(f) sont des espaces vectoriels.

Exercice 1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et

$$f_\alpha : \begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) . \end{aligned}$$

Montrer que f_α est linéaire et déterminer en fonction de α, Ker (f_α) et Im (f_α).

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\varphi : \begin{aligned} \mathbb{C}_n[X] &\to \mathbb{C}_n[X] \\ P &\mapsto P - (X + 1) P'. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Soit $P \in$ Ker (φ). Montrer que si $\deg(P) \geqslant 1$ alors P possède une infinité de racines et aboutir à une contradiction.
3. En déduire Ker (φ).
4. Démontrer que Im $(\varphi) \subseteq C_{n+1}[X]$.