Colle du 10/01 - Sujet 1
Algèbre linéaire

Question de cours. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'image de A.

Exercice 1. L'ensemble $E = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ s'annule } \right\}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2. Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$E = \text{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto \cos^3(x)\right)$$
$$F = \text{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(3x)\right).$$

Démontrer que $E = F$.

Colle du 10/01 - Sujet 2
Algèbre linéaire

Question de cours. Ecrire une fonction qui prend A une matrice adjacente d'un graphe et i un point du graphe et qui retourne le nombre de voisins de i.

Exercice 1.

1. L'ensemble $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone } \right\}$ est-il un espace vectoriel ?
2. L'ensemble $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \right\}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables. On pose

$$E = \{ y \in E \mid y'' - 2y' - 3y = 0 \}$$
$$F = \{ y \in E \mid y'' + 5y' + 4y = 0 \}.$$

Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de E puis déterminer $E \cap F$.

Colle du 10/01 - Sujet 3
Algèbre linéaire

Question de cours. Démontrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $E = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on pose $C^1([0;1])$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit également

$$E = \left\{ f \in C^1([0;1]) \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + af(x) = 0 \right\}$$
$$F = \left\{ f \in C^1([0;1]) \,\middle|\, \exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) \right\}.$$

1. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $C^1([0;1])$.
2. Déterminer $E \cap F$.

Colle du 10/01 - Sujet 1
Algèbre linéaire

Question de cours. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer l'image de A.

Exercice 1. L'ensemble $E = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,\middle|\, f \text{ s'annule } \right\}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2. Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos^2(x), x \mapsto \cos^3(x)\right)$$
$$F = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(3x)\right).$$

Démontrer que $E = F$.

Colle du 10/01 - Sujet 2
Algèbre linéaire

Question de cours. Ecrire une fonction qui prend A une matrice adjacente d'un graphe et i un point du graphe et qui retourne le nombre de voisins de i.

Exercice 1.

1. L'ensemble $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone } \right\}$ est-il un espace vectoriel ?
2. L'ensemble $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \right\}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables. On pose

$$E = \{ y \in E \mid y'' - 2y' - 3y = 0 \}$$
$$F = \{ y \in E \mid y'' + 5y' + 4y = 0 \}.$$

Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de E puis déterminer $E \cap F$.

Colle du 10/01 - Sujet 3
Algèbre linéaire

Question de cours. Démontrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $E = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on pose $C^1([0;1])$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit également

$$E = \left\{ f \in C^1([0;1]) \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + af(x) = 0 \right\}$$
$$F = \left\{ f \in C^1([0;1]) \;\middle|\; \exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x) \right\}.$$

1. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $C^1([0;1])$.
2. Déterminer $E \cap F$.