Colle du 20/12
Révisions algèbre et algèbre linéaire

Sujet 1

Question de cours.

1. Définir le noyau et l'image d'une matrice et démontrer que ce sont des sous-espaces vectoriels.
2. Déterminer l'image et le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

Exercice 2. Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Sujet 2

Question de cours. Ecrire un algorithme de tri.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, développer $(B + I_3)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

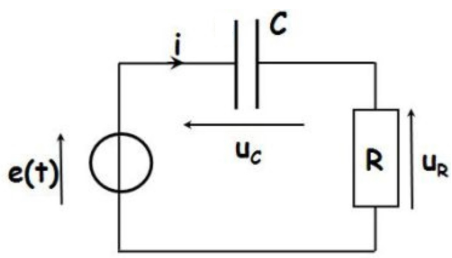
$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \psi(u) = (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. Montrer que φ et ψ sont des applications linéaires.
2. Déterminer leur noyau.
3. Déterminer leur image.

Sujet 3

Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines (complexes) du polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ sont simples.

Exercice 1.
Dans un circuit électrique, on considère une résistance R et un condensateur de capacité C en série. On suppose que l'intensité i est en fonction du temps t sinusoïdale : $i(t) = I\cos(\omega t)$, avec I et ω deux réels.



1. Exprimer la tension aux bornes de l'ensemble résistance-condensateur, notée $e(t)$.
2. On suppose que $C = \frac{1}{R\omega}$, montrer alors que la tension e est un signal sinusoïdal déphaser de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité et déterminer son amplitude.

Exercice 2.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe vérifie $\frac{z-i}{z-1} \in \mathbb{R}$.