Colle du 13/12
Révisions algèbre et algèbre linéaire

Sujet 1

Question de cours. Restituer la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 et l'appliquer à la détermination de l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre suivant les valeurs de a le système linéaire suivant

$$(S) \left\{ \begin{array}{llll} x & +ay & +z & = 1 \\ ax & +y & +(a-1)z & = 4 \\ x & +y & +z & = a+1 \end{array} \right.$$

Exercice 2. Montrer que -1 est une racine triple de $P(X) = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$ et en déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

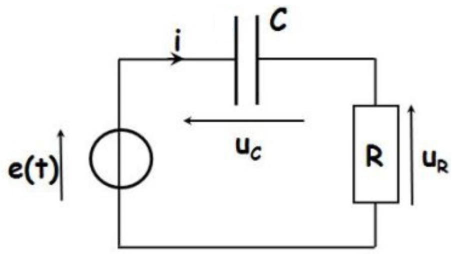
Sujet 2

Question de cours. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les racines (complexes) du polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ sont simples.

Exercice 1. Montrer que

$$\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}\left(X+2, X^2+2X, 2X^2+1\right).$$

Exercice 2.
Dans un circuit électrique, on considère une résistance R et un condensateur de capacité C en série. On suppose que l'intensité i est en fonction du temps t sinusoïdale : $i(t) = I\cos(\omega t)$, avec I et ω deux réels.



1. Exprimer la tension aux bornes de l'ensemble résistance-condensateur, notée $e(t)$.
2. On suppose que $C = \frac{1}{R\omega}$, montrer alors que la tension e est un signal sinusoïdal déphaser de $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'intensité et déterminer son amplitude.

Sujet 3

Question de cours. Ecrire un algorithme de tri.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \varphi(P) = X^2 P' \end{array}$$

est linéaire puis déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

RAB

Exercice 1. On considère les applications suivantes :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \psi(u) = (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. Montrer que φ et ψ sont des applications linéaires.
2. Déterminer leur noyau.
3. Déterminer leur image.