Colle du 06/12
EDO et simulations

Sujet 1

Question de cours. Soient r_d et r_g deux réels et soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u'(t) = -r_g\left(1 - v(t)\right)u(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = r_d\left(1 - u(t)\right)v(t).$$

Démontrer que la fonction E définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad E(t) = r_d\left(\ln(u) - u\right) + r_g\left(\ln(v) - v\right)$$

est constante.

Exercice 1. On considère une particule chargée soumis à un champs magnétique $\vec{B}$ constant de direction (Oz) : $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \end{pmatrix}$. On note $M(t) = \begin{pmatrix} X(t) & Y(t) & Z(t) \end{pmatrix}$ la position de la particule dans un repère orthonormé $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. On suppose que les fonctions x, y et z sont dérivables sur $I =]0; +\infty[$. On pose $M'(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'(t) & Y'(t) & Z'(t) \end{pmatrix}$ le vecteur vitesse de la particule. L'application du principe fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) à la particule soumis à la seule force de Lorenz résultant de l'interaction de la particule de charge q et de masse m avec le champs magnétique nous donne les équations suivantes :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \begin{cases} x'(t) = \omega y(t) \\ y'(t) = -\omega x(t) \\ z'(t) = 0, \end{cases}$$

où $\omega = \frac{qB}{m}$.

1. Justifier que x est une fonction deux fois dérivable sur I.
2. Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par x et la résoudre.
3. En déduire $M(t)$ pour $t \geqslant 0$.
4. On suppose $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\omega = 1$. Préciser alors $M(t)$ et $M'(t)$ pour $t \geqslant 0$.
5. Donner un programme Python dessinant $(x(t), y(t))$ en fonction du temps puis la position M en fonction du temps.
   On utilisera la commande $ax = plt.gca(projection =' 3d')$ puis $ax.plot(\dots)$ pour avoir un graphe en 3D.
6. Autre résolution. On souhaite résoudre les équations par une seconde méthode. On pose $\varphi(t) = x(t) + iy(t)$. Détermine une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par φ.
7. En déduire à nouveau $M'(t)$ et $M(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Sujet 2

Question de cours. Déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 1. En bio-chimie, on considère qu'une des substrats, notés S, en présence d'enzymes, noté E forment des complexes substrats-enzymes, notés SE :

$$S + E \to SE.$$

On suppose la réaction réversible, il arrive que le complexe se détache sans avoir modifié l'enzyme ou le substrat. Cependant le plus souvent l'enzyme modifie le substrat pour donner alors un élément produit noté P et repart vers de nouvelle rencontre avec d'autre substrats. On obtient alors les réactions suivantes :

$$S + E \leftrightharpoons SE \to P + E.$$

Afin de simplifier l'équation, on suppose les substrats en très grande quantité et que leur concentration dans la solution varie peu. On a alors

$$E \underset{k_2}{\overset{k_1}{\leftrightharpoons}} SE \overset{k_3}{\to} P + E,$$

où k_1, k_2 et k_3 sont les vitesses des réactions associées. On note $x(t)$ la concentration d'enzymes à l'instant t, $y(t)$ la concentration d'enzymes-substrats à l'instant t et $z(t)$ la concentration de produit à l'instant t. La vitesse d'apparition des produits est alors proportionnelle à la concentration d'enzymes-substrats :

$$\forall t \geqslant 0, \quad z'(t) = k_3 y(t).$$

On note $k = k_1 + k_2 + k_3$.

1. En tenant compte de toutes les réactions, donner les équations différentielles vérifiées par x et y.
2. Déterminer une quantité conserver dans ce système puis le vérifier en calculant la dérivée de cette quantité.
3. Déterminer alors une équation différentielle vérifiée par x uniquement (on dit que l'on a découplé les équations).
4. Résoudre cette équation et en déduire $x(t)$ puis $y(t)$ et $z(t)$ pour $t \geqslant 0$.
5. On suppose $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$. Préciser alors $x(t)$ puis $y(t)$ et $z(t)$ pour $t \geqslant 0$.
6. Déterminer les limites en $+\infty$ de ces fonctions et interpréter.
7. On pose $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. Elaborer un programme Python traçant x, y et z en fonction du temps.

Sujet 3

Question de cours. Résoudre sur $I =]0;1[$ puis $I =]1;+\infty[$, l'équation de Gompertz d'inconnue $u : I \to \mathbb{R}$:

$$\forall t \in I, \quad u'(t) = -ku\ln(u).$$

Exercice 1. On considère une particule chargée soumis à un champs magnétique $\vec{B}$ constant de direction (Oz) : $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B \end{pmatrix}$. On note $M(t) = \begin{pmatrix} X(t) & Y(t) & Z(t) \end{pmatrix}$ la position de la particule dans un repère orthonormé $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. On suppose que les fonctions x, y et z sont dérivables sur $I =]0;+\infty[$. On pose $M'(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'(t) & Y'(t) & Z'(t) \end{pmatrix}$ le vecteur vitesse de la particule. L'application du principe fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) à la particule soumis à la seule force de Lorenz résultant de l'interaction de la particule de charge q et de masse m avec le champs magnétique nous donne les équations suivantes :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \begin{cases} x'(t) = \omega y(t) \\ y'(t) = -\omega x(t) \\ z'(t) = 0, \end{cases}$$

où $\omega = \frac{qB}{m}$.

1. On pose $\omega = 1$, $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A l'aide d'un schéma d'Euler, écrire un programme Python à N itérations et retournant $(x(T), y(T))$, où N et T sont les paramètres du programme.
2. Démontrer que $\varphi : t \mapsto x^2(t) + y^2(x)$ est constante le long des trajectoires.
3. Modifier le programme précédent pour qu'il trace la trajectoire $(x(t), y(t))$ pour t entre 0 et T. Comparer les trajectoires au résultat précédent.
4. Ecrire un nouveau programme utilisant le programme précédent et à nouveau la méthode d'Euler pour tracer $M(t)$ pour t entre 0 et T.
   On utilisera la commande $ax = plt.gca(projection =' 3d')$ *puis* $ax.plot(\dots)$ *pour avoir un graphe en 3D.*

RAB

Exercice 1. En bio-chimie, on considère qu'une des substrats, notés S, en présence d'enzymes, noté E forment des complexes substrats-enzymes, notés SE :

$$S + E \to SE.$$

On suppose la réaction réversible, il arrive que le complexe se détache sans avoir modifié l'enzyme ou le substrat. Cependant le plus souvent l'enzyme modifie le substrat pour donner alors un élément produit noté P et repart vers de nouvelle rencontre avec d'autre substrats. On obtient alors les réactions suivantes :

$$S + E \leftrightharpoons SE \to P + E.$$

Afin de simplifier l'équation, on suppose les substrats en très grande quantité et que leur concentration dans la solution varie peu. On a alors

$$E \underset{k_2}{\overset{k_1}{\leftrightharpoons}} SE \overset{k_3}{\to} P + E,$$

où k_1, k_2 et k_3 sont les vitesses des réactions associées. On note $x(t)$ la concentration d'enzymes à l'instant t, $y(t)$ la concentration d'enzymes-substrats à l'instant t et $z(t)$ la concentration de produit à l'instant t. La vitesse d'apparition des produits est alors proportionnelle à la concentration d'enzymes-substrats :

$$\forall t \geqslant 0, \quad z'(t) = k_3 y(t).$$

On note $k = k_1 + k_2 + k_3$.

1. En tenant compte de toutes les réactions, donner les équations différentielles vérifiées par x et y.
2. On pose $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ et $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$. A l'aide de la méthode d'Euler, écrire un programme Python à N itérations retournant $(x(T), y(T), z(T))$, où N et T sont les paramètres du programme.
3. Adapter le programme précédent pour qu'il trace x, y et z en fonction du temps t pour t entre 0 et T.
4. Prédire le comportement asymptotique de chaque quantité.
5. Déterminer une quantité conserver dans ce système.
6. Démontrer théoriquement que cette quantité est conservée.
7. Le vérifier numériquement.