Colle du 29/11
EDO et suites récurrentes

Sujet 1

Question de cours. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par f. On pose $u_0 \in I$ et on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Donner un exemple graphique où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On pourra cherche une solution particulière du type $x \mapsto a\,\mathrm{e}^x + b\,\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = x\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \tag{E}$$

Sujet 2

Question de cours. Résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0. \tag{E_1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) + \frac{5}{4}y(x) = 0. \tag{E_2}$$

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}. \tag{E}$$

Exercice 2.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{(1+x)^2}$.
2. Soit $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{(1 + u_n)^2}.$$

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.
4. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis sa monotonie.

Sujet 3

Question de cours. Déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 \in [1; +\infty[, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie
2. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire sa limite.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On pourra cherche une solution particulière du type $x \mapsto x^2(ax+b)\,\mathrm{e}^{-x}$.

RAB

Exercice 1. On cherche à déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}. \tag{$\bigstar$}$$

1. Déterminer l'ensemble des suites géométriques non nulles solutions de ($\bigstar$). On notera r_1 et r_2 les deux raisons trouvées avec $r_1 < r_2$.
2. On pose dans cette questions $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$
   est solution de ($\bigstar$).
   (b) Exprimer λ et μ en fonction de u_0 et u_1.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution de ($\bigstar$).
   (a) On pose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \frac{2u_0 + u_1}{3}.$$
   Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r_1.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.
4. Déterminer l'unique solution de ($\bigstar$) vérifiant $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.