Colle du 22/11 - Sujet 1
Couples de variables aléatoires à densité

Question de cours. Donner la définition d'une v.a. de loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Calculer l'espérance et la variance associée à une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres 1 et 2 respectivement. Déterminer une densité de $S = X + Y$.

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0;1]$. On note $U = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Justifier que U est une variable aléatoire à densité et déterminer sa densité.
2. En déduire son espérance et sa variance.

Colle du 22/11 - Sujet 2
Couples de variables aléatoires à densité

Question de cours. Donner la définition d'une variable aléatoire uniforme sur $]a;b[$, $a < b$. Calculer son espérance, sa variance et sa fonction de répartition.

Exercice 1. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On note $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de V.

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. On pose X et Y deux variables aléatoires de densité f. On pose également $S = X + Y$ et on suppose que S a pour fonction de répartition :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ s^2 & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } s > 1 \end{cases}$$

   Justifier que S est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de S.
3. Calculer $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right)$.
4. Déduire de la question précédente que X et Y ne sont pas indépendantes.

Colle du 22/11 - Sujet 3
Couples de variables aléatoires à densité

Question de cours. Soient U une loi uniforme sur $[0;1]$ et $X = F^{-1}(U)$. A quoi correspond F pour X ? Sous quelles hypothèses pour F ? Le démontrer. Ecrire une fonction Python retournant une réalisation d'une loi $\mathscr{E}(1)$ à partir d'un tirage de la loi uniforme.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose X de loi uniforme sur $[0;1]$ et Y de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer une densité de $S = X + Y$.

Exercice 2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
5. En déduire que X admet une variance et la calculer.

Colle du 22/11 - Sujet 1
Couples de variables aléatoires à densité

Question de cours. Donner la définition d'une v.a. de loi $\mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Calculer l'espérance et la variance associée à une v.a. de loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres 1 et 2 respectivement. Déterminer une densité de $S = X + Y$.

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0;1]$. On note $U = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Justifier que U est une variable aléatoire à densité et déterminer sa densité.
2. En déduire son espérance et sa variance.

Colle du 22/11 - Sujet 2
Couples de variables aléatoires à densité

Question de cours. Donner la définition d'une variable aléatoire uniforme sur $]a;b[$, $a<b$. Calculer son espérance, sa variance et sa fonction de répartition.

Exercice 1. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On note $V = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de V.

Exercice 2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ a(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. On pose X et Y deux variables aléatoires de densité f. On pose également $S = X+Y$ et on suppose que S a pour fonction de répartition :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad F_S(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 0 \\ s^2 & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } s > 1 \end{cases}$$

   Justifier que S est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de S.
3. Calculer $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}\right)$.
4. Déduire de la question précédente que X et Y ne sont pas indépendantes.

Colle du 22/11 - Sujet 3
Couples de variables aléatoires à densité

Question de cours. Soient U une loi uniforme sur $[0;1]$ et $X = F^{-1}(U)$. A quoi correspond F pour X ? Sous quelles hypothèses pour F ? Le démontrer. Ecrire une fonction Python retournant une réalisation d'une loi $\mathscr{E}(1)$ à partir d'un tirage de la loi uniforme.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose X de loi uniforme sur $[0;1]$ et Y de loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer une densité de $S = X+Y$.

Exercice 2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
5. En déduire que X admet une variance et la calculer.