Colle du 15/11 - Sujet 1
Variables aléatoires à densité

Question de cours. Donner la définition d'une v.a. de loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$. Calculer l'espérance et la variance associée à une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|t|} & \text{si } t \in [-a; a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 2. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

1. Dresser le tableau de variation de φ.
2. Justifier que l'équation $\varphi(\alpha) = 1$ d'inconnue α admet une unique solution α et que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Vérifier que f est une densité de probabilité.
4. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$.
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et donner un encadrement de $\mathbb{E}(X)$ par deux entiers consécutifs.
6. La variable X admet-elle une variance ?

Colle du 15/11 - Sujet 2
Variables aléatoires à densité

Question de cours. Soient U une loi uniforme sur $[0; 1]$ et $X = F^{-1}(U)$. A quoi correspond F pour X ? Le démontrer. Ecrire une fonction Python retournant une réalisation d'une loi $\mathscr{E}(1)$ à partir d'un tirage de la loi uniforme.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{a}{1+t^2}.$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer si X admet une espérance et la calculer le cas échéant.

Exercice 2. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\ln^2(t)}{2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Montrer qu'il existe une fonction φ telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Comparer $\mathbb{E}(\ln(X))$ et $\ln(\mathbb{E}(X))$.

Colle du 15/11 - Sujet 3
Variables aléatoires à densité

Question de cours. Démontrer la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^4} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. La variable X possède-t-elle des moments d'ordres supérieurs ?

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \end{aligned}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$. Etudier les variations de φ et démontrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Déterminer l'expression de sa réciproque.
4. On pose $Y = \varphi(X) = \frac{\mathrm{e}^X - 1}{\mathrm{e}^X + 1}$. Déterminer la densité de Y. Quelle est la loi de Y ?

Colle du 15/11 - Sujet 1
Variables aléatoires à densité

Question de cours. Donner la définition d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calculer l'espérance et la variance associée à une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|t|} & \text{si } t \in [-a;a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 2. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

1. Dresser le tableau de variation de φ.
2. Justifier que l'équation $\varphi(\alpha) = 1$ d'inconnue α admet une unique solution α et que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Vérifier que f est une densité de probabilité.
4. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$.
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et donner un encadrement de $\mathbb{E}(X)$ par deux entiers consécutifs.
6. La variable X admet-elle une variance ?

Colle du 15/11 - Sujet 2
Variables aléatoires à densité

Question de cours. Soient U une loi uniforme sur $[0;1]$ et $X = F^{-1}(U)$. A quoi correspond F pour X ? Le démontrer. Ecrire une fonction Python retournant une réalisation d'une loi $\mathscr{E}(1)$ à partir d'un tirage de la loi uniforme.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{a}{1+t^2}.$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer si X admet une espérance et la calculer le cas échéant.

Exercice 2. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\ln^2(t)}{2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Montrer qu'il existe une fonction φ telle que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(0,1)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Comparer $\mathbb{E}(\ln(X))$ et $\ln(\mathbb{E}(X))$.

Colle du 15/11 - Sujet 3
Variables aléatoires à densité

Question de cours. Démontrer la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^4} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. La variable X possède-t-elle des moments d'ordres supérieurs ?

Exercice 2. Soit f la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$. Etudier les variations de φ et démontrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Déterminer l'expression de sa réciproque.
4. On pose $Y = \varphi(X) = \frac{\mathrm{e}^X - 1}{\mathrm{e}^X + 1}$. Déterminer la densité de Y. Quelle est la loi de Y ?