Sujet 1

Question de cours. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0;1]$. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $-\ln(U)$.

Exercice 1. La productivité y d'une variété de pin a été évaluée en fonction de sa densité x de peuplement (en plantes par m^2). On donne les valeurs suivantes :

Densité x	1,11	1,22	1,49	2,01	2,46	3,00	3,22	3,67	4,02
Productivité y	1,73	1,49	1,10	0,7	0,52	0,39	0,31	0,2	0,17

1. Donner les formules théoriques d'une moyenne et d'un écart-type d'une série statistique.
2. Ecrire un programme Python qui à partir d'une série statistique calcule sa moyenne et son écart-type.
3. A l'aide du programme précédent, écrire un programme qui retourne le coefficient de corrélation de deux séries.
4. On pose $X = \ln(x)$ et $Y = \ln(y)$. Calculer le coefficient de corrélation de x et y puis de X et Y.
5. Comparer les valeurs précédemment obtenues. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $f(x) \leqslant x$.

On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

3. Montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. A l'aide d'un algorithme de dichotomie déterminer une valeur approchée à ε près de la solution de $x = f(x)$.

Sujet 2

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebytchev

Exercice 1. On considère deux urnes :

- une urne verte contenant une boule rouge et trois boules vertes
- une urne rouge contenant deux boules rouges et deux boules vertes.

A chaque étape on tire au hasard et avec remise dans une urne. Si l'on obtient une boule verte, on tire la fois suivante dans l'urne verte. Si l'on obtient une boule rouge, on tire la fois suivante dans l'urne rouge.

5. Justifier que les tirages successifs suivent une chaîne de Markov.
6. Déterminer le graphe de cette chaîne.

On suppose que l'on tire initialement dans l'urne verte.

7. Déterminer la probabilité d'obtenir la première boule verte au troisième tirage. On justifiera proprement les calculs.
8. Déterminer la probabilité d'obtenir la première boule rouge au troisième tirage.
9. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge lors des trois premiers tirages.
10. Ecrire la matrice de transition.
11. Ecrire un programme Python qui retourne la distribution au temps n à partir d'une distribution initiale.
12. Conjecturer la distribution limite.

On pose v_n la probabilité d'obtenir une boule verte au tirage n et r_n la probabilité d'obtenir une boule rouge au tirage n.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et r_n. En déduire une expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
14. Que dire de la suite $\left(v_{n+1} - \frac{2}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$? Que peut-on en conclure ?

Sujet 3

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1. Une petite guêpe se retrouve enfermée dans une chambre A. Cette chambre n'est ouverte que sur un salon B lui-même ouvert sur l'extérieur E. On suppose qu'à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la trajectoire de la guêpe vérifie le protocole suivant. Si elle se trouve dans la chambre, la guêpe a deux chances sur trois de quitter la chambre pour atteindre le salon. Si elle se trouve dans le salon, elle a une chance sur quatre de retourner dans la chambre et une chance sur quatre également d'atteindre l'extérieur. Une fois à l'extérieur, la guêpe ne rentre plus.

1. Justifier que la position de la guêpe définit une chaîne de Markov.
2. Déterminer le graphe de Markov associé et la matrice de transition associée.
3. Calculer la probabilité pour la guêpe d'être dans la chambre à l'instant 2.
4. Calculer la probabilité pour la guêpe d'être dans le salon à l'instant 1 sachant qu'elle se trouvera dans la chambre à l'instant 2.

On pose a_n, b_n et e_n respectivement la probabilité pour la guêpe d'être dans A, B et E respectivement au temps n.

5. Conjecturer la distribution limite de la position de la guêpe.
6. Ecrire la distribution de la position de la guêpe au temps $n+1$ en fonction de la distribution de la guêpe au temps n.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$.
8. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
9. En déduire l'expression de e_n en fonction de n.
10. Déterminer la distribution limite.