Colle du 18/10
Révisions sur les probabilités, loi uniforme

Sujet 1

Question de cours. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0;1]$. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $-\ln(U)$.

Exercice 1. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$.

1. Construire un programme traçant les n premières valeurs de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > 1$.
3. Déterminer l'unique point fixe ϕ dans $[1;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{|x_0-\phi|}{\phi^n}$.
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - \phi| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n 2$.
6. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ϕ.
7. Construire un programme permettant de calculer ϕ à une précision ε près sans utiliser la fonction racine carrée mais à l'aide de la question 5 et d'une boucle *tant que*.

Sujet 2

Question de cours. Ecrire un programme `Dichotomie` retournant une valeur à `epsilon` près de la solution de $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [a;b]$ et l'appliquer à la résolution de $x^3 = 2$.

Exercice 1. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[-1;1]$.

1. Proposer un programme permettant de générer une réalisation de U à partir de *random.rand()*.
2. Déterminer la fonction de répartition de U^2.
3. Calculer l'espérance et la variance de U^2.
4. Construire un programme permettant de visualiser n réalisations de U^2.

Sujet 3

Question de cours. Soit U une variable aléatoire uniforme. Calculer l'espérance et la variance de $\cos(\pi U)$.

Exercice 1. Monsieur Dupont par en voyage d'affaire pendant cinq jours et emporte avec lui deux chemises blanches et huit chemises bleues. Chaque jour selon son humeur, il choisit une de ses chemises propres qu'il ne portera qu'une journée.

1. Calculer la probabilité que Monsieur Dupont ne s'habille qu'avec des chemises bleues durant son séjour.
2. Donner la loi du nombre de fois où Monsieur Dupont a porté une chemise blanche.
3. Quel est le nombre moyen de jours où Monsieur Dupont a porté une chemise blanche ?
4. Exprimer le nombre de jours où Monsieur Dupont a porté une chemise bleue en fonction du nombre de fois où Monsieur Dupont a porté une chemise blanche. En déduire le nombre moyen de fois où Monsieur Dupont a porté une chemise bleue.
5. A l'aide d'un grand nombre de simulations donner un programme retournant l'histogramme de la loi du nombre de jours où Monsieur Dupont a porté une chemise blanche.

RAB

Exercice 2. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x>0$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x>0$, $f(x)\geqslant \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout $x\geqslant\sqrt{2}$, $f(x)\leqslant x$.

On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$.

3. Montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. A l'aide d'un algorithme de dichotomie déterminer une valeur approchée à ε près de la solution de $x=f(x)$.