Colle du 03/10
Intégrales généralisées

Sujet 1

Question de cours.

1. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire $\mathbb{1}_{A\cup B}$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Montrer à l'aide d'indicatrices que $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Exercice 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+\sin(t)}{1+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 2. On pose $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon>0$, en posant $x=2t$, montrer que $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_\varepsilon^{2\,\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. Démontrer que pour tout $t\geqslant 0$, $1-t\leqslant \mathrm{e}^{-t}\leqslant 1$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de I.
5. En posant $x=\mathrm{e}^{-t}$, calculer $\displaystyle\int_0 1\frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

Sujet 2

Question de cours. Enoncer le critère d'absolue convergence. Démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+x+1}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\sin(x)\right)\mathrm{d}x$ converge.

Sujet 3

Question de cours.

1. Enoncer le théorème de comparaison.
2. Déterminer un équivalent de $\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y^{5/2}}$ lorsque $y \to 0$.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y^{5/2}}\,\mathrm{d}y$.

Exercice 1. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge puis la calculer.

Exercice 2. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^n}.$$

On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les variations de f_n.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, I_n est bien définie.
3. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
4. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - f_n(t) \leqslant t^n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.