Colle du 27/09
Intégrales généralisées

Sujet 1

Question de cours. Enoncer le théorème de changement de variables pour les intégrales généralisées.
A l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^t$, étudier la convergence de l'intégrale suivante et la calculer.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^t + 1)(1 + \mathrm{e}^{-t})} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 1. Etudier la convergence de l'intégrale suivante et la calculer.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(y+1)(y+2)}.$$

Exercice 2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.
2. Déterminer l'expression de I_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Sujet 2

Question de cours. Donner la définition d'une intégrale divergente sur $[1; +\infty[$.
Etudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 1. Montrer que l'intégrale suivante est convergente et la calculer.

$$I = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x.$$

Exercice 2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n est convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
4. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
5. En déduire une expression de I_{n+1} en fonction de n.

Sujet 3

Question de cours. Enoncer et démontrer le critère de convergence dans le cas des fonctions à valeurs positives. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 1.

1. Ecrire un programme qui prend $x \in \mathbb{R}$ en paramètre et retourne la valeur de $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Soient $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Ecrire un programme qui retourne la somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $[0; A]$. On utilisera notamment le programme de la question précédente.

On cherche maintenant un programme qui retourne la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ avec une erreur inférieur à $\varepsilon > 0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que la somme de Riemann de f sur $[0; A]$ est plus grande que l'intégrale de f entre $[0; A]$.
5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Justifier également que
$$\frac{A}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{A}{N}\right) \leqslant \frac{A}{N} + \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t.$$
6. En déduire que
$$\left|\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{A}{N}\right)\right| \leqslant \frac{A}{N}.$$
7. On pose $A = \frac{4}{\varepsilon}$. Déterminer $N \in \mathbb{N}^*$ pour que $\left|\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(k\frac{A}{N}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
8. Ecrire un programme qui prend $\varepsilon > 0$ en paramètre et retourne la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ avec une valeur d'au plus ε.

RAB

Exercice 1. Montrer que l'intégrale suivante converge et la calculer
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - 1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t.$$

Indication : ou pourra poser $t = 1/u$.