Colle du 04/04 - Sujet 1
Variables aléatoires discrètes à support infini

Question de cours. Démontrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson suit aussi une loi de Poisson.

Exercice 1. On lance une pièce dont la probabilité d'obtenir « Pile » est $p \in]0;1[$. On lance la pièce jusqu'à avoir obtenu exactement ℓ piles. On note alors X_ℓ le nombre de lancers effectués.

1. Déterminer la loi de X_ℓ.
2. A l'aide de $\mathbb{P}(X_{\ell+1} = k+1)$, déterminer l'espérance de X_ℓ.

Exercice 2. Deux joueurs possèdent chacun une pièce. La pièce de A tombe une fois sur trois sur pile en moyenne et la joueur B a une probabilité $p \in]0;1[$ d'obtenir pile.

1. Calculer la probabilité que un lancer de A soit différent d'un lancer de B.
2. Les deux joueurs effectuent N lancers. Le joueur A gagne un point à chaque fois que les lancers sont identiques. Déterminer la loi du nombre de points de A.

Colle du 04/04 - Sujet 2
Variables aléatoires discrètes à support infini

Question de cours. Montrer qu'une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ s'approche d'une loi de Poisson lorsque n augmente.

Exercice 1. Le nombre de blessés par bouchon de champagne aux urgences ophtalmologiques suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On admet que la probabilité qu'un blessé soit un homme est égal à la probabilité que le blessé soit une femme.

1. Sachant que n personnes ont été blessées, déterminer la loi du nombre de femmes blessées.
2. On note X le nombre de femmes blessées et Y le nombre d'hommes blessés. Déterminer la loi de X et celle de Y.
3. Quelle est l'espérance et la variance de X ?
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer la probabilité qu'il y ait autant de femmes que d'hommes blessés.

Exercice 2. Soient X_1 et X_2 deux lois géométriques indépendantes de paramètres p_1 et p_2 respectivement. Déterminer la loi de $M = \max(X_1, X_2)$.

Colle du 04/04 - Sujet 3
Variables aléatoires discrètes à support infini

Question de cours. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère A l'évènement « X est pair » et B l'évènement « X est impair ». Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 1. Deux joueurs possèdent chacun une pièce. La pièce de A tombe une fois sur trois sur pile en moyenne et la joueur B a une probabilité $p \in]0;1[$ d'obtenir pile. Chaque joueur lance sa pièce indépendamment de l'autre et ce jusqu'à ce qu'il obtienne un pile auquel cas il s'arrête. Le joueur ayant fait le moins de lancer doit payer autant d'euros que de lancers supplémentaires que l'autre joueur a obtenus. On note X le nombre de lancers de A, Y le nombre de lancer de B et Z le gain/la perte du joueur A.

1. Déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$.
2. Quelle est la loi de X ? de Y ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Z = n)$. En déduire $\mathbb{P}(Z > 0)$.

Exercice 2. On admet que pour tout $x \in]-1;1[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge vers $-\ln(1-x)$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \qquad \mathbb{P}(X = i, X = j) = \frac{a}{i2^{i+j}},$$

où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Donner les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

ENCPB LYCÉE PIERRE-GILLES DE GENNES
Colle de mathématiques BCPST2 2017-2018

Colle du 04/04 - Sujet 1
Variables aléatoires discrètes à support infini

Question de cours. Démontrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson suit aussi une loi de Poisson.

Exercice 1. On lance une pièce dont la probabilité d'obtenir « Pile » est $p \in]0;1[$. On lance la pièce jusqu'à avoir obtenu exactement ℓ piles. On note alors X_ℓ le nombre de lancers effectués.

1. Déterminer la loi de X_ℓ.
2. A l'aide de $\mathbb{P}(X_{\ell+1} = k+1)$, déterminer l'espérance de X_ℓ.

Exercice 2. Deux joueurs possèdent chacun une pièce. La pièce de A tombe une fois sur trois sur pile en moyenne et la joueur B a une probabilité $p \in]0;1[$ d'obtenir pile.

1. Calculer la probabilité que un lancer de A soit différent d'un lancer de B.
2. Les deux joueurs effectuent N lancers. Le joueur A gagne un point à chaque fois que les lancers sont identiques. Déterminer la loi du nombre de points de A.

ENCPB LYCÉE PIERRE-GILLES DE GENNES
Colle de mathématiques BCPST2 2017-2018

Colle du 04/04 - Sujet 2
Variables aléatoires discrètes à support infini

Question de cours. Montrer qu'une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ s'approche d'une loi de Poisson lorsque n augmente.

Exercice 1. Le nombre de blessés par bouchon de champagne aux urgences ophtalmologiques suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On admet que la probabilité qu'un blessé soit un homme est égal à la probabilité que le blessé soit une femme.

1. Sachant que n personnes ont été blessées, déterminer la loi du nombre de femmes blessées.
2. On note X le nombre de femmes blessées et Y le nombre d'hommes blessés. Déterminer la loi de X et celle de Y.
3. Quelle est l'espérance et la variance de X ?
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer la probabilité qu'il y ait autant de femmes que d'hommes blessés.

Exercice 2. Soient X_1 et X_2 deux lois géométriques indépendantes de paramètres p_1 et p_2 respectivement. Déterminer la loi de $M = \max\left(X_1, X_2\right)$.

Colle du 04/04 - Sujet 3
Variables aléatoires discrètes à support infini

Question de cours. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère A l'évènement « X est pair » et B l'évènement « X est impair ». Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 1. Deux joueurs possèdent chacun une pièce. La pièce de A tombe une fois sur trois sur pile en moyenne et la joueur B a une probabilité $p \in]0;1[$ d'obtenir pile. Chaque joueur lance sa pièce indépendamment de l'autre et ce jusqu'à ce qu'il obtienne un pile auquel cas il s'arrête. Le joueur ayant fait le moins de lancer doit payer autant d'euros que de lancers supplémentaires que l'autre joueur a obtenus. On note X le nombre de lancers de A, Y le nombre de lancer de B et Z le gain/la perte du joueur A.

1. Déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$.
2. Quelle est la loi de X ? de Y ?
3. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Z = n)$. En déduire $\mathbb{P}(Z > 0)$.

Exercice 2. On admet que pour tout $x \in]-1;1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge vers $-\ln(1-x)$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall (i,j) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2, \qquad \mathbb{P}(X = i, X = j) = \frac{a}{i2^{i+j}},$$

où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Donner les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?