Colle du 28/03 - Sujet 1
Séries et estimation

Question de cours. A l'aide du théorème de comparaison, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathrm{e}^{-n^2}$ converge. La série converge-t-elle absolument ?

Exercice 1. On s'intéresse à la probabilité p qu'un client laisse un pourboire dans un restaurant. On note X_i la variable aléatoire retournant 1 si le client i laisse un pourboire et 0 sinon. Sur 100 clients, 38 ont laissé un pourboire. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Avec quelle loi peut-on approcher S_n ?
3. Construire un intervalle de confiance autour de p à 95%, à 95%.
4. Peut-on conclure que la proportion de clients laissant un pourboire est de 50% ?

Exercice 2.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln(n)}{n}$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$.
3. Démontrer que $\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

Colle du 28/03 - Sujet 2
Séries et estimation

Question de cours. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$Y_n = X_n X_{n+1}.$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, donner la loi de Y_n puis $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$.
2. Pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - p^2\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 1.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et calculer sa somme.
2. En déduire que la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.
3. Etudier la nature de la série de terme général u_n, défini pour tout $n \geqslant 1$ par
$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2. Un pisciculteur daltonien élève des poissons rouges. En réalité, il ne s'aperçoit pas que 2% de ses poissons sont verts. On prélève 150 poissons et on note X le nombre de poissons verts obtenus dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle loi peut-on approcher X ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X > 3)$ avec l'approximation précédente.

Colle du 28/03 - Sujet 3
Séries et estimation

Question de cours. Soit $q \in]-1;1[$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 q^n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n!}$ converge.
2. On note R_n le reste d'ordre n de la série : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{k!}$. Montrer que
$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n!}.$$
3. Ecrire un programme Python qui calcule une valeur approchée à la précision $\varepsilon > 0$ de e.

Exercice 2. On suppose que la durée de vie d'une abeille né au printemps est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité de densité est donné par

$$f(t) = \frac{\alpha^3}{3} t^2 \, \mathrm{e}^{-\alpha t},$$

où α est un paramètre que l'on doit déterminer.

1. Sachant que la longévité moyenne d'une abeille est de 50 jours, déterminer α.
2. Soit Y la longévité de 2000 abeille nées le premier avril. Déterminer la valeur de t pour laquelle $\mathbb{P}(|Y-50| \geqslant t)$
   (a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (b) En effectuant une approximation.

Colle du 28/03 - Sujet 1
Séries et estimation

Question de cours. A l'aide du théorème de comparaison, montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathrm{e}^{-n^2}$ converge. La série converge-t-elle absolument ?

Exercice 1. On s'intéresse à la probabilité p qu'un client laisse un pourboire dans un restaurant. On note X_i la variable aléatoire retournant 1 si le client i laisse un pourboire et 0 sinon. Sur 100 clients, 38 ont laissé un pourboire. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Avec quelle loi peut-on approcher S_n ?
3. Construire un intervalle de confiance autour de p à 95%, à 95%.
4. Peut-on conclure que la proportion de clients laissant un pourboire est de 50% ?

Exercice 2.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\ln(n)}{n}$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$.
3. Démontrer que $\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(n)}{2}$.

Colle du 28/03 - Sujet 2
Séries et estimation

Question de cours. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$Y_n = X_n X_{n+1}.$$

1. Pour tout $n \geqslant 1$, donner la loi de Y_n puis $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathrm{Var}(Y_n)$.
2. Pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|S_n - p^2\right| > \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 1.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge et calculer sa somme.
2. En déduire que la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.
3. Etudier la nature de la série de terme général u_n, défini pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 2. Un pisciculteur daltonien élève des poissons rouges. En réalité, il ne s'aperçoit pas que 2% de ses poissons sont verts. On prélève 150 poissons et on note X le nombre de poissons verts obtenus dans l'échantillon.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Avec quelle loi peut-on approcher X ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X > 3)$ avec l'approximation précédente.

Colle du 28/03 - Sujet 3
Séries et estimation

Question de cours. Soit $q \in]-1;1[$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 q^n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 1.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{n!}$ converge.
2. On note R_n le reste d'ordre n de la série : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{k!}$. Montrer que

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n!}.$$

3. Ecrire un programme Python qui calcule une valeur approchée à la précision $\varepsilon > 0$ de e.

Exercice 2. On suppose que la durée de vie d'une abeille né au printemps est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité de densité est donné par

$$f(t) = \frac{\alpha^3}{3} t^2 \,\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

où α est un paramètre que l'on doit déterminer.

1. Sachant que la longévité moyenne d'une abeille est de 50 jours, déterminer α.
2. Soit Y la longévité de 2000 abeille nées le premier avril. Déterminer la valeur de t pour laquelle $\mathbb{P}(|Y - 50| \geqslant t)$
   (a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (b) En effectuant une approximation.