Colle du 21/03 - Sujet 1
Produit scalaire et théorèmes limites

Question de cours. Enoncer la loi faible des grands nombres et la démontrer lorsque les variables aléatoires admettent une variance.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}\left((1,2,2),(2,1,-2)\right)$.

1. Montrer que la famille génératrice est orthogonal et la rendre normée. On notera $\mathscr{B}_F = (e_1, e_2)$ la famille obtenue.
2. Déterminer M la matrice de p la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Donner alors D la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
4. Calculer la distance de $A(1,1,1)$ au plan F.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0;1]$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$M_n = \max\left(X_1, \ldots, X_n\right) \qquad \text{et} \qquad Y_n = n\left(1 - M_n\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de M_n puis celle de Y_n.
2. Montrer que $(Y)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire remarquable.
3. On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \min\left(X_1, \ldots, X_n\right)$ et $W_n = nU_n$. Montrer que $1 - M_n$ et U_n ont la même loi et en déduire que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire remarquable.

Colle du 21/03 - Sujet 2
Produit scalaire et théorèmes limites

Question de cours. On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PD^tP$.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

1. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$?
2. Calculer $\mathbb{P}\left(S_n \leqslant n\right)$.
3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Une entreprise compte 300 employés. Chaque employé passe en moyenne 6 minutes par heure au téléphone. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour qu'à l'instant t, la probabilité que toutes les lignes soient occupées soit inférieure ou égal à $0,025$?

Colle du 21/03 - Sujet 3
Produit scalaire et théorèmes limites

Question de cours.

1. A l'aide de la loi faible des grands nombres, écrire un programme Python calculant une estimation d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire X donnée par une fonction Python $X()$ quelconque.
2. Compléter le programme précédent pour que la probabilité d'obtenir une erreur supérieure à $\varepsilon > 0$ soit inférieure à 5%.

Exercice 1. Dans une ferme, tous les lapins ont les yeux bleus sauf un lapin sur dix qui est albinos et a les yeux jaunes. On prélève 453 lapins et l'on note X le nombre de lapins albinos.

1. Quelle est la loi de X ? Sous quelles conditions ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ puis $\mathrm{Var}(X)$ la variance de X.
3. Par quelle loi peut-on approcher X ?
4. En déduire une approximation de $\mathbb{P}(20 \leqslant X \leqslant 50)$.
5. Résoudre à nouveau la question précédente à l'aide de la question de cours.
6. Déterminer un intervalle I centré en $\mathbb{E}(X)$ tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geqslant 0,95$

Exercice 2. Soit s l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que s conserve les distances i.e. pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\|s(u)\| = \|u\|$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points fixes de s.
3. Calculer $s \circ s$.
4. Montrer que $\frac{1}{2}(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.

Colle du 21/03 - Sujet 2
Produit scalaire et théorèmes limites

Question de cours. On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PD^tP$.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

1. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?
2. Calculer $\mathbb{P}(S_n \leqslant n)$.
3. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Une entreprise compte 300 employés. Chaque employé passe en moyenne 6 minutes par heure au téléphone. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour qu'à l'instant t, la probabilité que toutes les lignes soient occupées soit inférieure ou égal à $0,025$?

Colle du 21/03 - Sujet 1
Produit scalaire et théorèmes limites

Question de cours. Enoncer la loi faible des grands nombres et la démontrer lorsque les variables aléatoires admettent une variance.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}\left((1,2,2), (2,1,-2)\right)$.

1. Montrer que la famille génératrice est orthogonal et la rendre normée. On notera $\mathscr{B}_F = (e_1, e_2)$ la famille obtenue.
2. Déterminer M la matrice de p la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Donner alors D la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$.
4. Calculer la distance de $A(1,1,1)$ au plan F.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0;1]$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n) \qquad \text{et} \qquad Y_n = n(1 - M_n).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction de répartition de M_n puis celle de Y_n.
2. Montrer que $(Y)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire remarquable.
3. On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $W_n = nU_n$. Montrer que $1 - M_n$ et U_n ont la même loi et en déduire que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire remarquable.

Colle de mathématiques BCPST2 2017-2018

Colle du 21/03 - Sujet 3
Produit scalaire et théorèmes limites

Question de cours.

1. A l'aide de la loi faible des grands nombres, écrire un programme Python calculant une estimation d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire X donnée par une fonction Python $X()$ quelconque.
2. Compléter le programme précédent pour que la probabilité d'obtenir une erreur supérieure à $\varepsilon > 0$ soit inférieure à 5%.

Exercice 1. Dans une ferme, tous les lapins ont les yeux bleus sauf un lapin sur dix qui est albinos et a les yeux jaunes. On prélève 453 lapins et l'on note X le nombre de lapins albinos.

1. Quelle est la loi de X ? Sous quelles conditions ?
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ puis $\text{Var}(X)$ la variance de X.
3. Par quelle loi peut-on approcher X ?
4. En déduire une approximation de $\mathbb{P}(20 \leqslant X \leqslant 50)$.
5. Résoudre à nouveau la question précédente à l'aide de la question de cours.
6. Déterminer un intervalle I centré en $\mathbb{E}(X)$ tel que $\mathbb{P}(X \in I) \geqslant 0,95$

Exercice 2. Soit s l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & -2 & -6 \\ -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que s conserve les distances i.e. pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\|s(u)\| = \|u\|$.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points fixes de s.
3. Calculer $s \circ s$.
4. Montrer que $\frac{1}{2}(s - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est une projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.