Colle du 21/02 - Sujet 1
Diagonalisation et produit scalaire

Question de cours. Soit $\mathscr{L} = (v_1, \dots, v_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)$ une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathscr{L}$ est libre.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $B = {}^tAA$ est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de B sont positives.

Exercice 2. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PD{}^tP$.

Colle du 21/02 - Sujet 2
Diagonalisation et produit scalaire

Question de cours. Soient A une matrice réelle symétrique, λ_1, λ_2 deux valeurs propres de A et v_1, respectivement v_2, un vecteur propre associé à λ_1, respectivement λ_2. Montrer que v_1 et v_2 sont orthogonaux.

Exercice 1. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PD{}^tP$.

Exercice 2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$.

Déterminer $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|u\|^2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle u, v \rangle = x + u + z$.

Démontrer que $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$.

Colle du 21/02 - Sujet 3
Diagonalisation et produit scalaire

Question de cours. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P(M) = 0$ et si λ est une valeur propre de M, que peut-on en déduire ? Le démontrer.

Exercice 1. Soient $E = \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et A la matrice de f dans la base canonique. On pose f^* l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^tA$.

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$. Montrer que $g = f^*$.
3. Soit u un vecteur propre de f^*. Montrer que si $\langle x, u \rangle = 0$ alors $\langle f(x), u \rangle = 0$.

Exercice 2. On considère $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$.

1. Montrer que si P est un vecteur propre de f alors $\deg(P) = 2$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Colle du 21/02 - Sujet 1
Diagonalisation et produit scalaire

Question de cours. Soit $\mathscr{L} = (v_1, \ldots, v_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ avec $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)$ une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathscr{L}$ est libre.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $B = {}^tAA$ est diagonalisable.
2. Montrer que les valeurs propres de B sont positives.

Exercice 2. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PD{}^tP$.

Colle du 21/02 - Sujet 2
Diagonalisation et produit scalaire

Question de cours. Soient A une matrice réelle symétrique, λ_1, λ_2 deux valeurs propres de A et v_1, respectivement v_2, un vecteur propre associé à λ_1, respectivement λ_2. Montrer que v_1 et v_2 sont orthogonaux.

Exercice 1. On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible telle que $A = PD{}^tP$.

Exercice 2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$.

Déterminer $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|u\|^2 = x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle u, v\rangle = x + u + z$.

Démontrer que $(x + y + z)^2 \leqslant \frac{11}{6}$.

Colle du 21/02 - Sujet 3
Diagonalisation et produit scalaire

Question de cours. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P(M) = 0$ et si λ est une valeur propre de M, que peut-on en déduire ? Le démontrer.

Exercice 1. Soient $E = \mathbb{R}^n$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et A la matrice de f dans la base canonique. On pose f^* l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^tA$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
2. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$. Montrer que $g = f^*$.
3. Soit u un vecteur propre de f^*. Montrer que si $\langle x, u\rangle = 0$ alors $\langle f(x), u\rangle = 0$.

Exercice 2. On considère $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$.

1. Montrer que si P est un vecteur propre de f alors $\deg(P) = 2$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.