Colle du 20/09
Révisions sur l'analyse

Sujet 1

Question de cours. Enoncer le théorème de changement de variables puis en posant $t = \sin(u)$ calculer

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2 - 1}.$$

Exercice 2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\, \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que la suite converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire la limite de la suite.
4. A l'aide des questions précédentes, déterminer un encadrement de I_n et en déduire un équivalent.

Sujet 2

Question de cours. Enoncer le théorème de croissance de l'intégrale. En déduire un majorant de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 t^n\, \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en 0 telles qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Indication : on pourra calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}$ *de deux façons différentes.*

Exercice 4. Soit $I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\, \mathrm{d}t$. En posant le changement de variable $u = \pi - t$, calculer I.

Sujet 3

Question de cours. Ecrire une fonction Min(L) qui étant donnée une liste de nombre L, retourne le minimum des éléments de cette liste ainsi que le dernier indice où cette valeur est atteinte.

Exercice 5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 6. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ et $\varphi(0) = 1$. On considère également la fonction f, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f.