TP 4 : résolution de $f(x) = 0$ par balayage et dichotomie

Introduction

L'objectif est de déterminer pour une fonction donnée les antécédents de 0 par cette fonction. On propose pour ce faire deux méthodes. On appliquera ces deux méthodes pour déterminer la racine carrée de 2 ainsi que le nombre d'or.

1. On considère l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = 2. \tag{1}$$

Déterminer la fonction f pour le problème soit équivalent à l'équation $f(x) = 0$.

. . . .

2. On considère également l'équation d'inconnu $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 = x + 1. \tag{2}$$

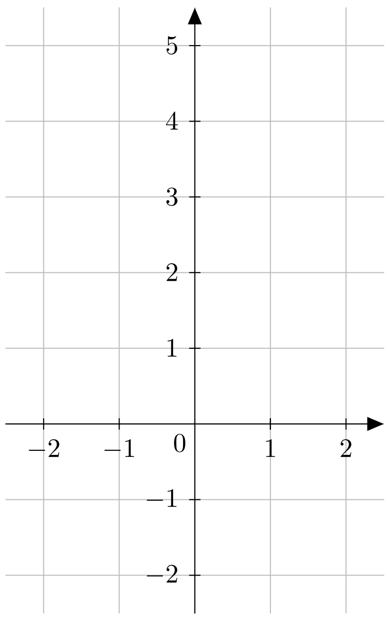
Déterminer la fonction g pour le problème précédent soit équivalent à l'équation $g(x) = 0$.

. . . .

I Par balayage

3. Remplir de tête le tableau suivant puis en déduire une allure des graphes de f et de g.

x	-2	-1	0	1	2
x^2					
$f(x)$					
$g(x)$					



4. En déduire le nombre de solutions de l'équation (1) ainsi qu'un encadrement à la précision 10^0 de ces solutions.

. . . .

5. Même question pour les solution de l'équation (2).

. . . .

On note α l'unique solution positive de l'équation (1), φ^+ l'unique solution positive de l'équation (2) et enfin φ^- l'unique solution négative de l'équation (2).

6. A l'aide de la calculatrice remplir le tableau suivant :

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$											
$g(x)$											

7. En déduire un encadrement de α et de φ^+ à la précision 10^{-1}.

. . . .

8. Itérer le processus pour obtenir une valeur de α à la précision 10^{-3}.

. . . .

. . . .

9. Même question pour φ^+.

. . . .

. . . .

10. Vérifier que $\alpha = \sqrt{2}$ et que $\varphi^+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont solutions de (1) et (2) respectivement.

. . . .

. . . .

. . . .

II Algorithme de dichotomie

On reprend l'équation (1) et la solution positive associée α.

11. Démontrer *rigoureusement* que la fonction f est croissante sur $[0; 2]$.

. . . .

. . . .

. . . .

12. Montrer que $f(0) < 0$ et que $f(2) > 0$. Pourquoi peut-on en déduire que $0 < \alpha < 2$?

....

....

13. On prend le milieu de $[0; 2]$. Quel est le signe de son image par f ? Que peut-on en déduire sur sa position par rapport à α ?

....

....

14. On prend donc le milieu de $[1; 2]$. Calculer sans calculatrice son image par f. Quel est son signe ? En déduire un nouvel encadrement de α.

....

....

15. Calculer le milieu de $[1; 3/2]$ puis son image par f (sans calculatrice !). En déduire un nouvel encadrement de α.

....

....

16. Voici une liste d'instructions. Les remettre dans l'ordre afin d'écrire l'algorithme de dichotomie.

- alors $A \longleftarrow M$
- $B \longleftarrow 2$
- Si $f(M) < 0$
- $M \longleftarrow \frac{A+B}{2}$
- findesi
- sinon $B \longleftarrow M$
- Afficher A et B
- findepour
- Demander N
- $A \longleftarrow 0$
- Pour i allant de 1 à N

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

17. Ecrire l'algorithme sur la calculatrice.

1. Créer un nouveau programme : *[prgm] [NOUV] [entrer]*
2. Donner un nom au programme « DICHOTO » en appuyant sur les touches correspondantes en mode alpha puis *[entrer]*.
3. Affecter une valeur : la valeur *[sto →]* une lettre (en mode alpha) *[entrer]*.
4. Demander une ou des valeur(s) : Prompt (*[prgm] [E/S]* ou *[I/O] [2 :Prompt]*) puis les valeurs séparées d'une virgule.
5. Créer une boucle : *[prgm] [4 :For(]* donner le compteur (une lettre comme I par exemple) puis une virgule / le premier nombre / une virgule / le second nombre / fermer la parenthèse *[entrer]*.
6. Terminer une boucle pour : *[prgm] [7 :End] [entrer]*.
7. Créer une instruction conditionnelle. Si : *[prgm] [1 :If]*. Alors : *[prgm] [2 :Then]*. Sinon *[prgm] [3 :Else]*. Fin *[prgm] [7 :End]*. Les comparateurs ($=$, $\geqslant$, $\leqslant$, $<$ et $>$) se trouve dans *test [2nde] [math]*. Les instructions logiques *[2nde] [math] [LOGIQUE]*.
8. Faire appel à une fonction définie dans $f(x)$: *[var] [Y-VARS] [1 :Fonction...] [1 :Y_1]* (pour faire appel à la fonction Y_1).
9. Afficher une valeur : Disp (*[prgm] [E/S]* ou *[I/O] [3 :Disp]*) et la variable ou une chaîne de caractères entre " ".

Voici ce que l'on doit obtenir :

PROGRAM :DICHOTO
: $0 \to A$
: $1 \to B$
: Prompt N
: For$(I, 1, N)$
: $(A+B)/2 \to M$
: If $Y_1(M) < 0$
: Then
: $M \to A$
: Else
: $M \to B$
: End
: End
: Disp A, B