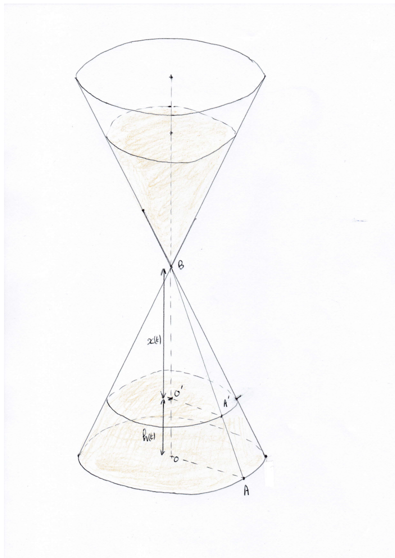
Devoir Maison 2

La présentation doit être soignée et toutes les questions doivent être justifiées. La réflexion en groupe est autorisée mais la rédaction des solutions doit être ***personnelle****. La moindre suspicion de recopiage annulera la copie du copieur et du copié.*

Exercice 1. *(7 points).*

Numérobis a un délai très strict pour construire un palais à la reine Cléopâtre. Mais Numérobis est étourdi et ne se souvient plus de la date du début de la construction. Sa seule information étant le sablier de Cléopâtre : celui-ci est composé de deux cônes de révolution identiques reliés l'un à l'autre par leurs sommets. Le sable s'écoule du cône du haut vers le cône du bas et remplira entièrement le cône du bas lorsque les trois mois s'achèveront.

Numérobis sait que le rayon de la base R est de 1 mètre et la hauteur H du sablier de 4 mètres. On note $x(t)$ la distance entre le sommet du tas de sable tombé au temps t et le milieu de sablier et on note $h(t)$ la hauteur du tas de sable tombé. On note également O le centre du cercle de la base du sablier, A un point de ce cercle, B le sommet commun aux deux cônes, O' le centre du cercle formant le haut du tas de sable tombé et A' l'intersection de ce cercle avec (AB).



On définit v la fonction qui a chaque instant t associe le volume $v(t)$ du sable tombé. On suppose que la fonction v est affine et que Numérobis a fait les relevés suivants. Lorsqu'il est venu une première fois voir le sablier, il y a 15 jours, à $t = -15$ le sable a atteint une hauteur

$$h(-15) = 0,5\text{m}.$$

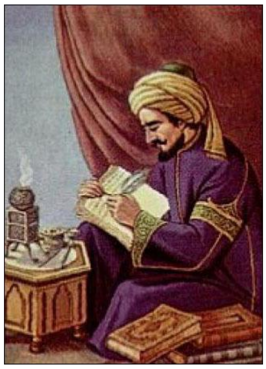
Aujourd'hui, le sable a atteint une hauteur

$$h(0) = 1\text{m}.$$

1. Soit $t \geqslant 0$. Exprimer $x(t)$ en fonction de H et $h(t)$.
2. Exprimer, en justifiant soigneusement la réponse, $O'A'$ en fonction de R, $x(t)$ et H.
3. Montrer que $v(t) = \frac{\pi R^2 H}{6} - \frac{4\pi x(t)^3 R^2}{3H^2}$.
4. Donner une valeur numérique de $v(0)$ et $v(-15)$.
5. En déduire la pente de la fonction v.
6. Donner l'ordonnée à l'origine de v et en déduire son expression algébrique.
7. Combien de temps reste-t-il à Numérobis pour finir ses travaux ?

Exercice 2. *(10 points).* Le texte suivant est codé et nous souhaitons découvrir le message caché. On sait qu'il a été crypté selon le code César qui consiste à décaler toutes les lettres de l'alphabet d'un même nombre. Par exemple si ce nombre est 5, le A devient F, le B devient G, le C devient H etc.

Ju Trwmr nbc dw bjejwc jajkn md mrg-wndernvn brnlun zdr b'nbc rwcnanbbn j mn wxvkandbnb blrnwlnb juujwc mn uj pnxvncarn j uj vnmnlrwn nc j uj lqrvrn. Mjwb un « Vjwdblarc bda un lqrooanvnwc mnb vnbbjpnb lahycxpajyqrzdnb » ru ngyurzdn lxvvnwc ljbbna unb vnruundab lxmnb lxwwdb j bxw nyxzdn, j u'jrmn mn uj cnlqwrzdn mn u'jwjuhbn mn oanzdnwln. L'nbc uj yanvrnan cajln lxwwdn mn lahycjwjuhbn. Yja lxwbnzdnwc, ru nbc lxwbrmnan lxvvn u'dw mnb oxwmjcndab mn uj mrblryurwn.



L'analyse fréquentielle est une approche statistique qui s'appuie sur le fait que les lettres dans une langue ne sont pas uniformément représentées. En effet dans la langue française, les fréquences d'apparitions de chaque lettre sont données par (en pourcentage arrondi au dixième) :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Lettre	e	a	i	s	t	n	r	u	l	o	d	m	p
Fréquence	15,87	9,42	8,41	7,9	7,26	7,15	6,46	6,24	5,34	5,14	3,39	3,24	2,86

Rang	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Lettre	c	v	q	g	b	f	j	h	z	x	y	k	w
Fréquence	2,64	2,15	1,06	1,04	1,02	0,95	0,89	0,77	0,32	0,3	0,24	0	0

1. Quelle est la moyenne des fréquences théoriques ?
2. Quelle est le premier quartile ? le troisième quartile ?

On considère que le texte codé est un échantillon d'une population de lettres vérifiant les fréquences ci-dessus.

3. Critiquer le fait que les lettres soient tirées de façon indépendantes les unes des autres.
4. Pourquoi ne pouvons-nous pas construire d'intervalle de fluctuation autour des valeurs théoriques données dans le tableau ci-dessus ?

On admet que l'on peut construire un intervalle de fluctuation lorsque les conditions suivantes sont remplies :

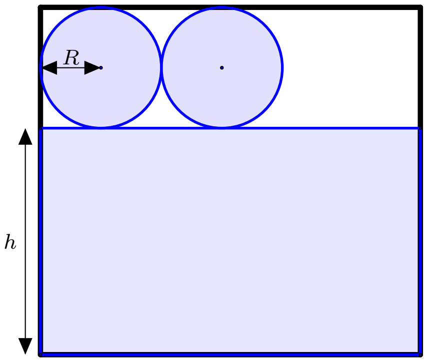
$$n \geqslant 30 \qquad \text{et} \qquad np > 5 \qquad \text{et} \qquad n(1-p) > 5.$$

5. Pour quelles lettres pouvons-nous construire un intervalle de fluctuation ?
6. Pour chacune de ces lettres, construire l'intervalle de fluctuation à 95% associé.
7. Quelle est la lettre dont la fréquence d'apparition dans le texte crypté est la plus grande ? Dans quel(s) intervalle(s) de fluctuation la fréquence de cette lettre peut-elle appartenir ?
8. Même question pour la deuxième lettre la plus fréquente.
9. A l'aide de la question 7, déterminer le décalage qui a permis de coder le texte.
10. Décrypter le message.

Exercice 3. *(7 points)*.

Une entreprise de boîte de conserve souhaite optimiser sa production. Les boîtes sont des cylindres de hauteur h et dont le rayon du disque de base est noté R. Elles sont construites à partir de plaques de métal dans lesquelles sont découpées le patron ci-contre.

Le coût de la matière première est donné par l'aire a de la plaque rectangulaire achetée par l'usine. On fixe $a = 603$ cm^2. L'objectif de l'usine est de trouver la largeur l et la longueur L idéales pour obtenir des boîtes d'un volume maximal.



1. Exprimer l et L en fonction de h et R et en déduire une expression de a en fonction de h et de R.
2. Montrer que
$$h = \frac{a}{2\pi R} - 2R.$$
3. En déduire que le volume du cylindre construit à l'aide du patron ci-dessus est de
$$\mathscr{V} = \frac{Ra}{2} - 2\pi R^3.$$
4. On regarde $\mathscr{V}$ comme une fonction du rayon R : $\mathscr{V}(R) = 301,5R - 2\pi R^3$ et on admet que cette fonction possède un unique maximum là où $\mathscr{V}$ est positif. Plus précisément, le tableau de variation de $\mathscr{V}$ est donné par :

R	0		R_{max}		$\sqrt{\frac{a}{4\pi}}$
$\mathscr{V}$	0	$\nearrow$	V_{max}	$\searrow$	0

où R_{max} est le rayon pour lequel le volume construit V_{max} est maximal. On souhaite approcher V_{max} et pour ce faire on va construire un algorithme sur l'idée suivante.

On part d'un rayon R nul que l'on va augmenter petit à petit en lui ajoutant à chaque étape une quantité P (par exemple $P = 0,1$). A chaque étape on regarde si le volume $\mathscr{V}(R+p)$ correspondant est plus grand ou plus petit que le volume précédent $\mathscr{V}(R)$. Si le volume est plus grand, notre recherche progresse et l'on continue d'augmenter R. Sinon c'est que l'on vient tout juste de dépasser le maximum. On s'arrête alors et l'on note la dernière valeur de R et le volume associé. Selon cette idée, compléter l'algorithme ci-contre.

- $R \leftarrow 0$
- Demander P
- $A \leftarrow 301,5 * R - 2 * \pi * R^3$
- $B \leftarrow 301,5 * (R+P) - 2 * \pi * (R+P)^3$
- Tant que $A \ldots\ldots B$
- $\quad \ldots\ldots \leftarrow R + P$
- $\quad A \leftarrow B$
- $\quad B \leftarrow 301,5 * (R+P) - 2 * \pi * (R+P)^3$
- Findetantque
- Retourner R et A.

5. Construire l'algorithme sur calculatrice et l'appliquer avec un pas $P = 0,1$. En déduire la valeur de R_{Max}.
6. A l'aide de la question 2, en déduire h.