# Chapitre IX : géométrie vectorielle

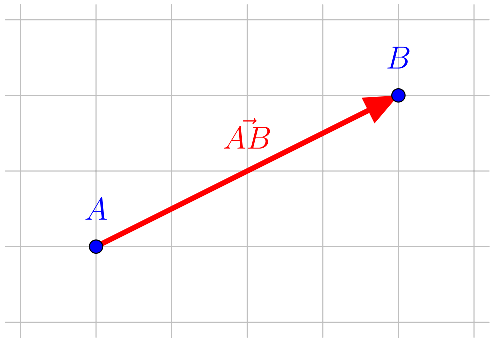
Dans tout ce cours on se fixe un repère orthonormé $(O; I, J)$.

## I Définition d'un vecteur

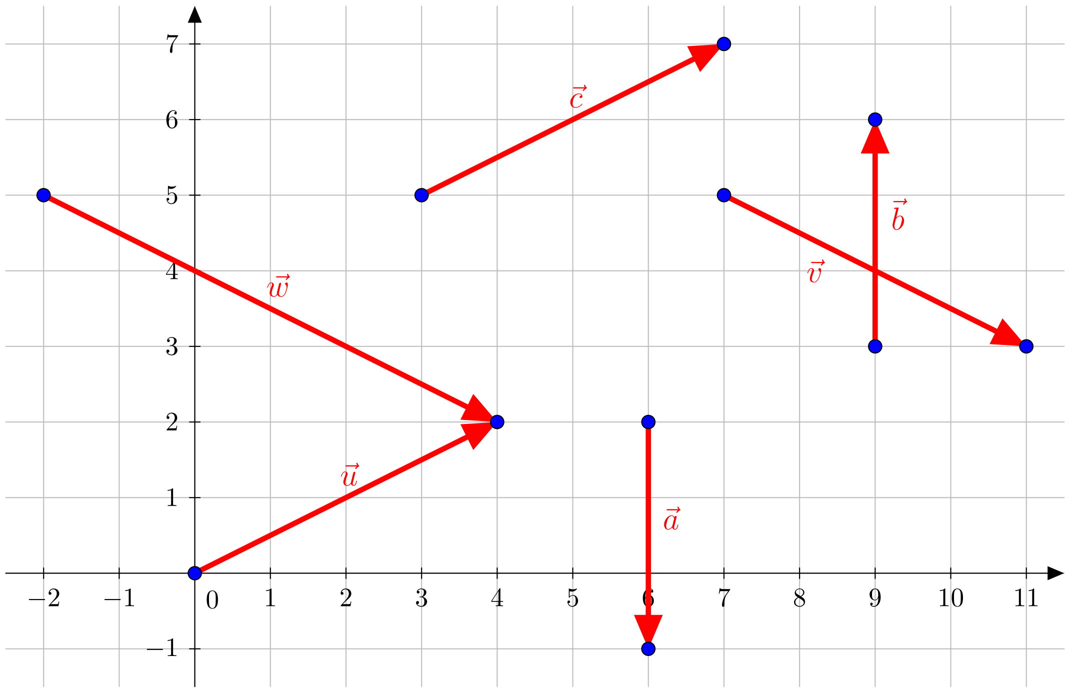
**Définition I.1**

Soient $A$ et $B$ deux points du plan. Le **vecteur** $\vec{AB}$ est la donnée

- d'une **direction**, celle de la droite $(AB)$,
- d'un **sens**, de $A$ vers $B$,
- d'une **norme**, la distance $AB$.




**Exemple 1**. On considère les vecteurs suivants.



1. Déterminer les vecteurs qui ont la même direction.
2. Parmi ces vecteurs, lesquels sont orientés dans le même sens ?
3. Quels sont les vecteurs ayant la même norme ?
4. Quelle est la norme de $\vec{a}$ puis de $\vec{u}$ ?

**Proposition I.2**

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même norme, la même direction et le même sens.

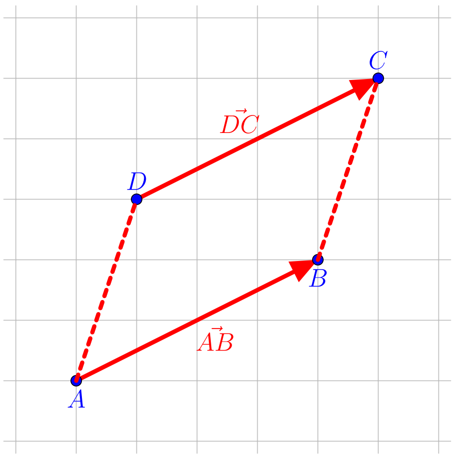
**Exemple 2**. Dans l'exemple 1, quels sont les vecteurs égaux ?

**Conséquence importante**

Deux vecteurs peuvent être **égaux** mais représentés dans le plan à deux endroits **différents**.

**Proposition I.3**

Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).




**Démonstration.** Soient $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points du plan. Si $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont égaux alors ils ont la même norme. C'est-à-dire $AB = DC$. De plus, puisque $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont égaux ils ont également la même direction. Cela signifie que les droites $(AB)$ et $(DC)$ sont parallèles. Donc $ABCD$ est un parallélogramme.

Réciproquement si $ABCD$ est un parallélogramme alors $AB = DC$ et les droites $(AB)$ et $(DC)$ sont parallèles. Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ ont la même norme et la même direction. Ces deux vecteurs sont également de même sens puisque l'on considère le parallélogramme $ABCD$ et non $ABDC$.

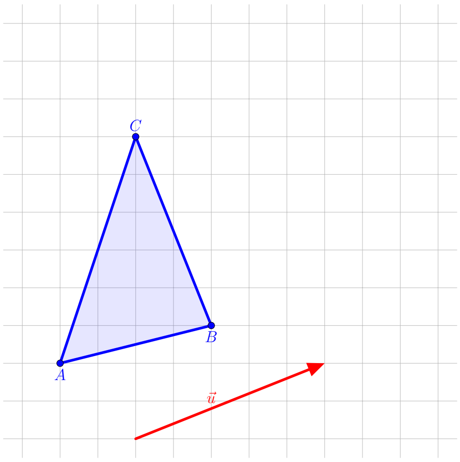
□

**Proposition I.4**

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application qui envoie chaque point $M$ sur le point $M'$ de telle façon que

$$\vec{u} = \vec{MM'}.$$

**Application 1.** Tracer l'image du triangle $ABC$ par la translation de vecteur $\vec{u}$.




# II Coordonnées d'un vecteur

**Définition II.1**

Soient $\vec{u}$ un vecteur et $M$ l'unique point du plan tel que $\vec{OM} = \vec{u}$. **Les coordonnées** du vecteurs $\vec{u}$ sont par définition les coordonnées $(x_M; y_M)$ du point $M$.

**Proposition II.2**

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Les coordonnées du vecteurs $\vec{AB}$ sont

$$(x_B - x_A; y_B - y_A).$$

**Démonstration.** Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. On note $M$ l'unique point du plan tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. Par la proposition I.3, on sait que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Donc le point d'intersection $K$ des diagonales $[OB]$ et $[MA]$ est le milieu de ces diagonales. Ainsi

$$x_K = \frac{0 + x_B}{2} = \frac{x_M + x_A}{2}$$

Donc

$$\frac{x_B}{2} = \frac{x_M + x_A}{2} \iff x_B = x_M + x_A \iff x_M = x_B - x_A.$$

De même,

$$y_K = \frac{0 + y_B}{2} = \frac{y_M + y_A}{2}$$

Donc

$$\frac{y_B}{2} = \frac{y_M + y_A}{2} \iff y_B = y_M + y_A \iff y_M = y_B - y_A.$$

Maintenant les coordonnées de $\vec{AB}$ sont celles de $\vec{OM}$ (par la définition II.1) qui sont $(x_M; y_M)$. D'où

$$\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A).$$

□

**Exemple 3.** Donner les coordonnées des vecteurs de l'exemple 1.

**Définition II.3**

Le vecteur nul noté $\vec{0}$ est l'unique vecteur de coordonnées $(0;0)$.

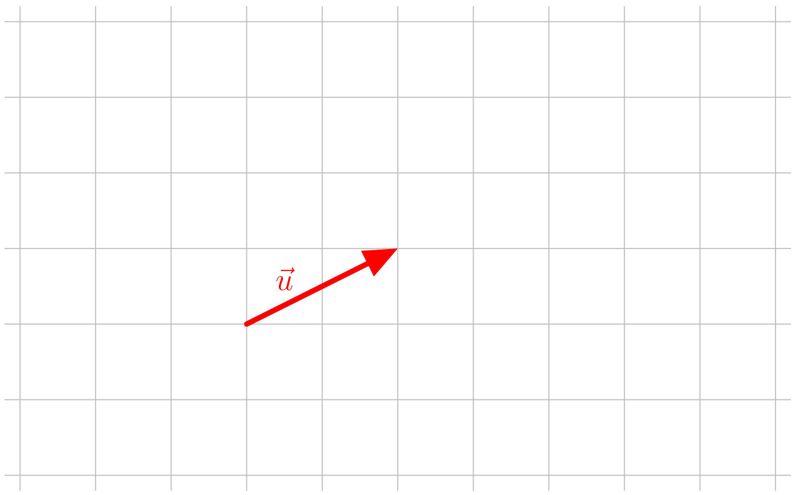
# III Opérations sur les vecteurs

**Définition III.1**

La **multiplication** d'un vecteur $\vec{u}(x;y)$ par un réel $\lambda$, noté $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées

$$(\lambda x; \lambda y)\,.$$

**Exemple 4.**




Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ (on donne $OI = OJ = 1$ carreau). Calculer alors les coordonnées de $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $-\vec{u}$ et $\frac{\vec{u}}{2}$. Les tracer sur la figure.

**Proposition III.2**

Soit $\vec{u}$ un vecteur et $\lambda$ un réel.

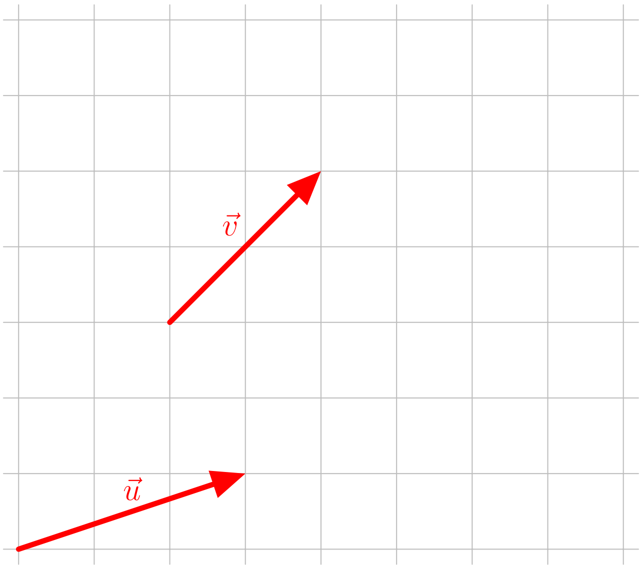
1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction.
2. Si $\lambda = 0$, alors $\lambda\vec{u} = \vec{0}$.
3. Si $\lambda > 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ sont de même sens.
4. Si $\lambda < 0$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ sont de sens opposés.

**Définition III.3**

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, noté $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur de coordonnées

$$(x+x'; y+y')\,.$$

**Exemple 5.**

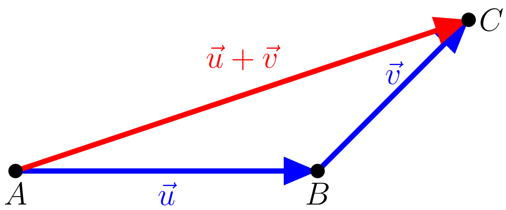



Déterminer les coordonnées des $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on donne $OI = OJ = 1$ carreau). En déduire les coordonnées du vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et le placer sur la figure.

**Proposition III.4 (Relation de Chasles)**

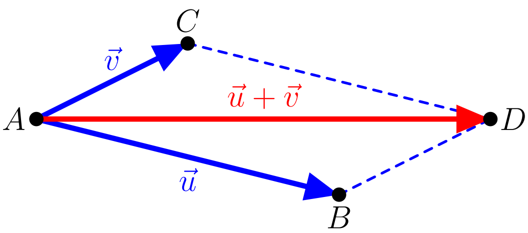
Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan. On a

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$




**Proposition III.5 (Règle du parallélogramme)**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan. On a $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.



# IV Colinéarité, alignement et parallélisme

**Définition IV.1**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si

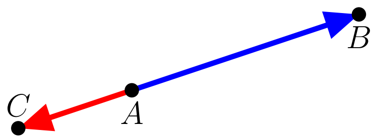
- l'un des vecteurs est nul, $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- OU s'il existe un réel $\lambda$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

*Remarque : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.*

**Exemple 6**. Parmi les vecteurs de l'exemple 1, lesquels sont colinéaires ?

**Proposition IV.2**

Trois points $A$, $B$ et $C$ du plan sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.




**Proposition IV.3**

Soient quatre points du plan $A$, $B$, $C$ et $D$. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.