Chapitre VIII : fonctions quadratiques

I La fonction carré

I.1 Définition

Définition I.1

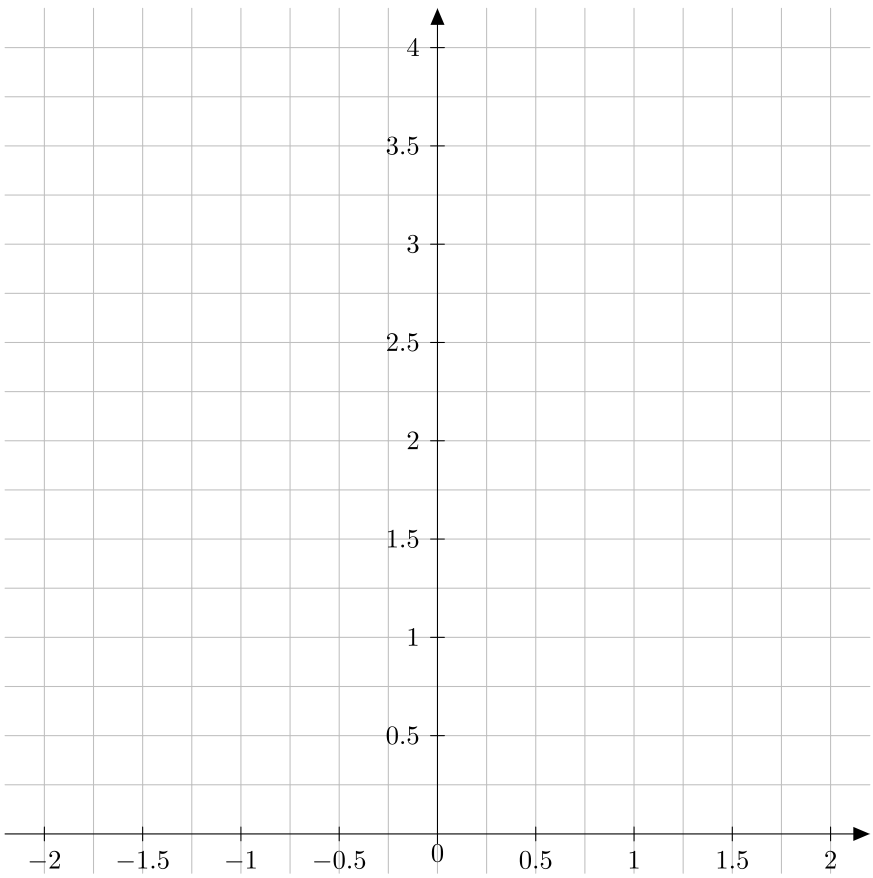
La **fonction carré** est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel associe le produit du réel par lui-même :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Remplir le tableau suivant :

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$									

En déduire son graphe entre $[-2; 2]$:



I.2 Tableau de variation

Proposition I.2

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

Démonstration. Soient u et v deux réels tels que $u \leqslant v \leqslant 0$. Puisque v est négatif, on a

$$\begin{aligned} & u \times v \geqslant v \times v \geqslant 0 \times v \\ \Leftrightarrow \quad & uv \geqslant v^2 \geqslant 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

De plus, puisque u est négatif, on a également

$$\begin{aligned} & u \times u \geqslant u \times v \geqslant u \times 0 \\ \Leftrightarrow \quad & u^2 \geqslant uv \geqslant 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

En regroupant (1) et (2), par transitivité, on obtient que

$$u^2 \geqslant uv \geqslant v^2 \geqslant 0.$$

D'où

$$u^2 \geqslant v^2.$$

Au final, la fonction carré inverse le sens de l'inégalité et est donc décroissante sur $]_{\infty};0]$.

□

Soit u et v deux réels tels que $0 \leqslant u \leqslant v$. En s'inspirant de la démonstration ci contre, montrer que $u^2 \leqslant v^2$ et que donc la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Compléter en conséquence le tableau de variation de la fonction carré :

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$\searrow$		$\nearrow$

I.3 Equations et inéquations

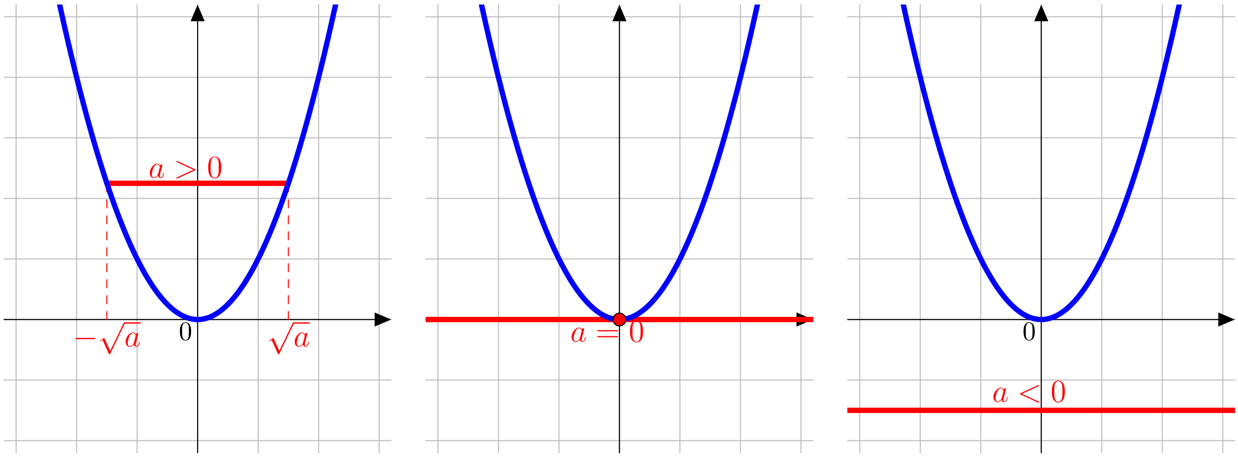
Proposition I.3

Soit a un réel. On considère l'équation

$$x^2 = a.$$

Alors

1. si $a > 0$, l'équation possède deux solutions $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$,
2. si $a = 0$, l'équation possède une seule solution $x = 0$,
3. si $a < 0$, l'équation ne possède aucune solution.



Exemple 1. Résoudre les équations suivantes.

1) $x^2 = 16$. 2) $x^2 = 100$. 3) $x^2 = -4$.
4) $x^2 = 12$ 5) $x^2 = 6 \times 4 - 3 \times 8$. 6) $x^2 = 75$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemple 2. Résoudre les inéquations suivantes.

1) $x^2 < 81$. 2) $x^2 > 36$. 3) $x^2 \leqslant -4$.
4) $x^2 \geqslant 27$ 5) $x^2 < \dfrac{1}{4}$. 6) $x^2 > \dfrac{9}{49}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

II Les fonctions quadratiques

II.1 Définition

Définition II.1

Une fonction f est dite **quadratique** s'il existe a, b et c trois coefficients réels, avec $a \neq 0$, tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

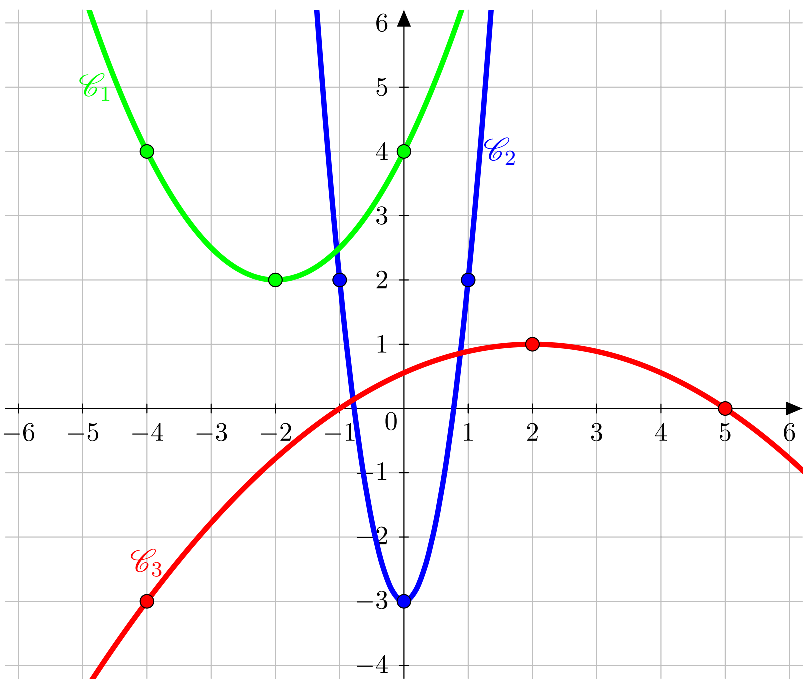
Le coefficient c est l'image de 0 par f : c'est donc l'ordonnée à l'origine.

Définition II.2

Le graphe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction quadratique f est appelé **une parabole**.

Exemple 3. Relier chacune des fonctions quadratiques suivantes à son graphe.

$$f(x) = 5x^2 - 3 \qquad g(x) = -\frac{(x-2)^2}{9} + 1 \qquad h(x) = \frac{(x+2)^2}{2} + 2.$$



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

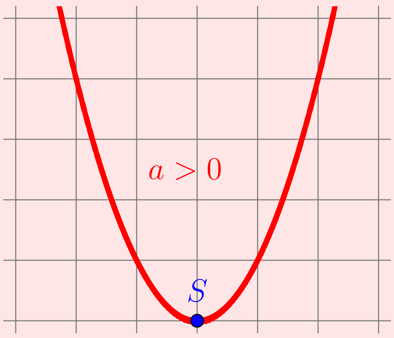
. . . .

II.2 Tableaux de variations

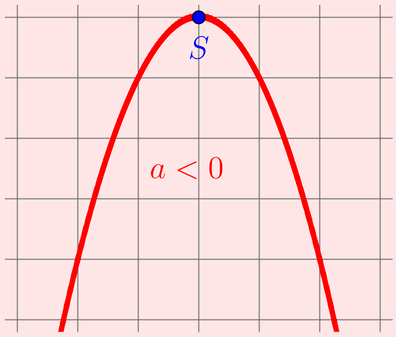
Proposition II.3

La parabole d'une fonction quadratique $x \mapsto ax^2 + bx + c$ peut être « tournée » vers le haut ou vers le bas.

• Si $\mathbf{a > 0}$, la parabole est orientée vers le haut :



• Si $\mathbf{a < 0}$, la parabole est orientée vers le bas :



Soit $S(x_S; y_S)$ le sommet de la parabole.

Proposition II.4

L'abscisse x_S du sommet S de la parabole représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est donnée par

$$x_S = \frac{-b}{2a}.$$

Son ordonnée y_S est alors égale à

$$y_S = f(x_S).$$

Les deux tableaux de variations possibles de la parabole sont donnés ci-dessous.

• Si $\mathbf{a > 0}$:

x	$-\infty$		x_S		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	y_S	↗	$+\infty$

• Si $\mathbf{a < 0}$:

x	$-\infty$		x_S		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	y_S	↘	$-\infty$

III Tableaux de signes et inéquations

III.1 Forme factorisée

Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies respectivement pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{et} \qquad g(x) = a(x - x_0)^2.$$

Développer f et g et vérifier que f et g sont bien des fonctions quadratiques.

. . . .

. . . .

. . . .

III.2 Tableaux de signes et inéquations

Exemple 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (4x - 3)(5 - 7x).$$

On souhaite savoir pour quelles valeurs de x la fonction f est-elle négative, c'est-à-dire résoudre l'inéquation

$$f(x) \leqslant 0.$$

Etape 1 : Etablir le signe de chaque facteur de f. D'une part on a

$$4x - 3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \geqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{3}{4}.$$

Donc

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x - 3$			0		

D'autre part,

$$5 - 7x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \geqslant 7x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{7} \geqslant x.$$

Donc

x	$-\infty$		$\frac{5}{7}$		$+\infty$
$5 - 7x$			0		

Etape 2 : établir le tableau de signes global.

x	$-\infty$		$\frac{5}{7}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$5-7x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$			0		0		

Etape 3 : conclure en donnant l'ensemble de définition.

$$\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{5}{7}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[.$$

Application 1. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $(4x+2)(9x-5) > 0$,
2. $-x\left(\frac{x}{6}+7\right) < 0$,
3. $(1-3x)\left(\frac{3x}{8}+5\right) \geqslant 0$.