Chapitre IV : expressions algébriques et résolutions d'équations et d'inéquations

I Expressions algébriques

Définition I.1

Développer, c'est transformer un produit en somme.

Exemple 1.

$$3(4x+1) = 3 \times 4x + 3 \times 1 = 12x + 3.$$

Exemple 2. Développer $(x-4)(5x+3) =$ ....

....

....

Exemple 3. Le lit de maman ourse est trois fois plus grand que le lit de petit ourson moins 4 (l'unité est mesurée en patte d'ours). Le lit de papa ours est $\frac{3}{2}$ fois plus grand que celui de maman ourse plus $\frac{3}{7}$. Exprimer la taille du lit de papa ours en fonction de celui de petit ourson.

....

....

....

Proposition I.2

- *(distributivité simple)* $k(a+b) =$ ....
- *(distributivité double)* $(a+b)(c+d) =$ ....

Définition I.3

Factoriser, c'est transformer une somme en produit.

Exemple 4.

$$20x^2 - 15x = 5x \times 4x + 5x \times (-3) = 5x \times (4x-3) = 5x(4x-3).$$

Exemple 5. Factoriser $4x(x-1)+7x-7 =$ ....

....

....

Exemple 6. Jack plante deux haricots un vert et un blanc dans son jardin. Le haricot vert pousse de 3 mètres le premier jour puis de 8 mètres les jours suivants tandis que le haricot blanc pousse de 15 mètres le premier jour puis de 40 mètres les jours suivants. Déterminer la taille du haricot blanc en fonction du jour. Combien de fois est-il plus grand que le haricot vert ?

....

....

....

Exercice 1. Développer les expressions suivantes :

$$(a+b)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a-b)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a-b)(a+b) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Proposition I.4 (Identités remarquables)

$$(a+b)^2 = \dots\dots\dots\dots$$

$$(a-b)^2 = \dots\dots\dots\dots$$

$$(a-b)(a+b) = \dots\dots\dots\dots$$

Application 1. Développer.

1. $(3x-2)(3x+2) =$ ....
2. $(2x-1)^2 =$ ....

Application 2. Factoriser.

1. $9x^2+6x+1 =$ ....
2. $(2x-3)^2-(-3x+1)^2 =$ ....

Rappel

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

II Résolution graphique

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit a un réel.

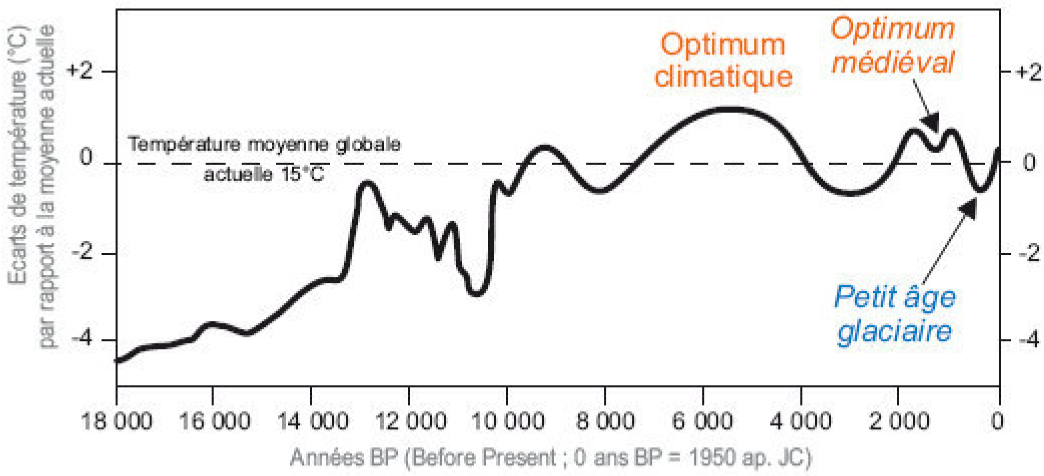
Proposition II.1

L'équation

$$f(x) = a$$

d'inconnu $x \in I$, a pour solutions les .... des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f avec la droite horizontale d'équation $y = \ldots\ldots.$

Exemple 7. On donne ci-dessous la température de la Terre pendant la fin du Pléistocène (de 2,58 millions d'années à 11 700 ans avant le présent) et pendant l'Holocène (dernière période interglaciaire correspondant aux 11700 dernières années jusqu'à aujourd'hui).



On note f la fonction donnant la température en fonction du temps. Donner le nombre de solutions de l'équation puis une estimation graphique de ces solutions dans les cas suivants :

1. $f(x) = 15°C$ ....

   ....

2. $f(x) = 12°C$ ....

3. $f(x) = 17°C$ ....

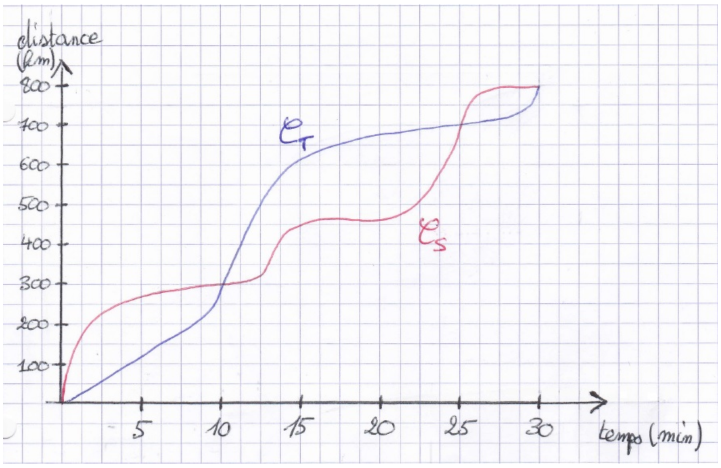
Proposition II.2

L'équation

$$f(x) = g(x)$$

d'inconnu $x \in I$, a pour solutions les .... des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f avec la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de g.

Exemple 8. Sonic et Tail font la course. On donne ci-dessous les graphes représentant la distance parcourue en fonction du temps.



1. Qui est arrivé en premier ? ....
2. En prenant en compte **toute** la course, combien de fois Sonic et Tail se sont-ils retrouvés au même endroit ?

   ....
3. On note S la fonction donnant la distance parcourue par Sonic en fonction du temps et T celle donnant la distance parcourue par Tail en fonction du temps. Résoudre l'équation $S(x) = T(x)$.

   ....

Proposition II.3

1. L'inéquation
$$f(x) \leqslant a$$
(respectivement $f(x) \geqslant a$) d'inconnu $x \in I$, a pour solutions les .... des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f qui sont .... (respectivement ....) de la droite horizontale d'équation $y =$ ....
2. L'inéquation
$$f(x) \leqslant g(x)$$
d'inconnu $x \in I$, a pour solutions les .... des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f qui sont .... de la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de g.

NB : lorsque l'inégalité est stricte, $f(x) < a$ ou $f(x) > a$ ou $f(x) < g(x)$, il faut considérer les points strictement en-dessous ou strictement au dessus.

Application 3. Résoudre dans l'exemple 7 l'inéquation $f(x) \geqslant 15$. ....

....

En déduire le tableau de signes

x	
$f(x) - 15$	

Application 4. Dans l'exemple 8, à quoi correspond l'inéquation $T(x) < S(x)$? La résoudre.

. . . .

. . . .

Compléter le tableau de signes :

x	0		5		25		30
$S(x)-T(x)$	0		0		0		0

III Résolutions algébriques

III.1 Equation du premier degré

Exemple 9. On considère la réaction de fusion de noyaux d'hydrogène en noyau d'hélium, réaction qui est au coeur du soleil et qui est responsable son énergie :

$$4H^+ \longrightarrow He^{2+} + 2e^+.$$

Quatre noyaux d'hydrogène (protons) fusionnent pour donner un noyau d'hélium (constitué de deux protons et de deux neutrons, ici les neutrons ne sont pas comptabilisés) et deux positrons. Soit x le nombre de noyaux d'hélium produits.

1. Exprimer le nombre de positrons produits en fonction de x.

   . . . .

2. Considérons qu'initialement nous avons 13 noyaux d'hélium et 2 positrons. Calculer la quantité de noyaux d'hélium qu'il faut produire pour obtenir trois fois plus de positrons que de noyaux d'hélium.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

Méthode

1. Mettre les termes en « x » d'un côté de l'égalité et les termes n'ayant pas de « x » de l'autre.
2. Diviser chacun des membres de l'égalité par le coefficient multiplicateur de x.

Exemple 10. Résoudre l'équation suivante : $-3(x+4)+6 = 8x-1-3x$ d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

. . . .

. . . .

. . . .

III.2 Inéquation du premier degré

Exemple 11. On reprend l'exemple 9.

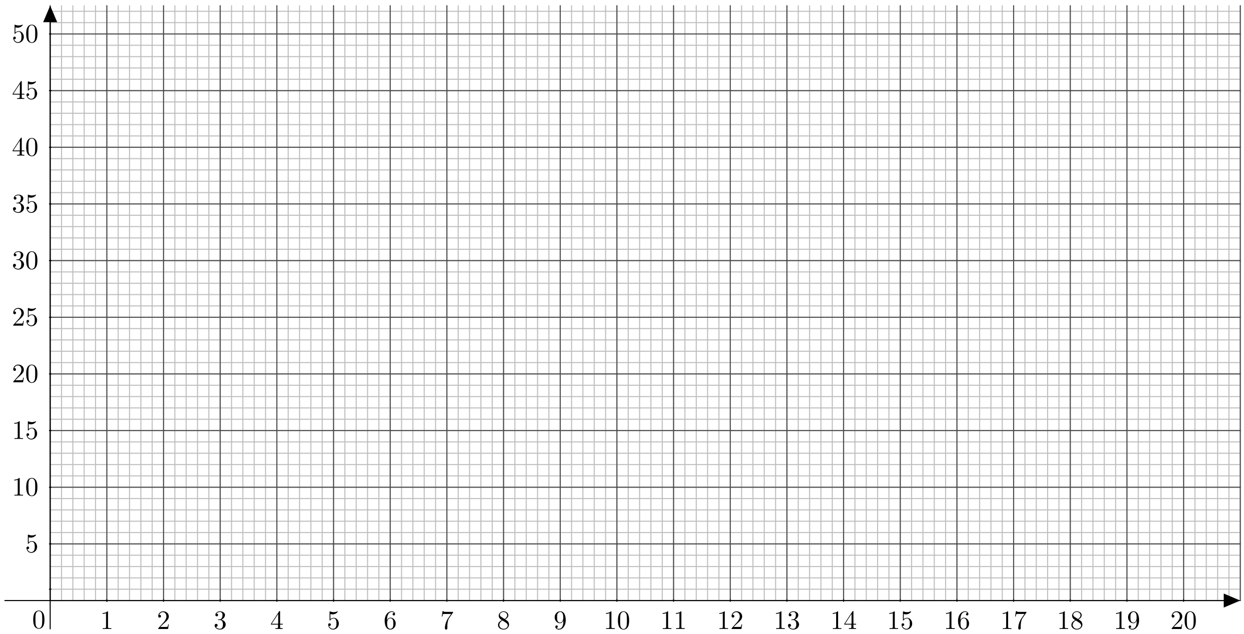
1. Déterminer l'ensemble des $x \in [0; +\infty[$ pour lesquels la quantité totale de noyaux d'hélium est supérieure à la quantité totale de positrons.

   ....

   ....

   ....

2. Tracer la quantité de noyaux d'hélium et la quantité de positrons en fonction de x dans le graphe suivant :



3. En déduire graphiquement les solutions de la question 1.

Pour résoudre une inéquation du premier degré, il faut procéder comme pour une équation SAUF lorsque l'on divise par un nombre négatif :

Attention

Diviser par un nombre négatif chacun des membres d'une inégalité .... le sens de l'inégalité.

Exemple 12. Résoudre l'inéquation $-7(3 + 4x) \leqslant -2(3 - x)$ d'inconnu $x \in \mathbb{R}$.

....

....

....

III.3 Résolution d'équations et d'inéquations de produits nuls

Proposition III.1

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul.

Exemple 13.

1. Développer $9x^2 + 3x - 7 - 3(x + 6)$. ....

   ....

2. Factoriser le résultat. ....

   ....

3. En déduire les solutions de l'équation $9x^2 + 3x - 7 - 3(x + 6) = 0$

   ....

   ....

Exemple 14.

1. Résoudre les inéquations suivantes.

   (a) $-3x + 2 \geqslant 0$ ....

   (b) $4 + 2x \geqslant 0$ ....

   (c) $-5x - 20 \geqslant 0$ ....

2. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = (-3x + 2)(4 + 2x)(-5x - 20)$. A l'aide de la question précédente, remplir le tableau de signes suivant :

x	
$-3x + 2$	
$4 + 2x$	
$-5x - 20$	
$F(x)$	

3. En déduire les solutions de l'inéquation $(-3x + 2)(4 + 2x)(-5x - 20) \leqslant 0$.