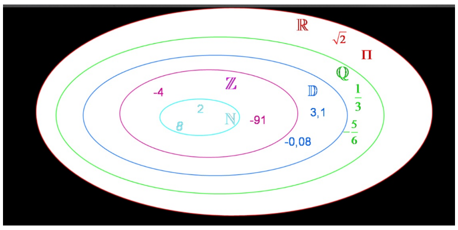
Chapitre II : Etude qualitative de fonctions

I Définition

I.1 Les ensembles



- L'ensemble $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : $0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\ldots\,;\,13975\,;\,\ldots$
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** :
  $\ldots\,;\,-98745432\,;\,\ldots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,\ldots\,;\,13975\,;\,\ldots$
- L'ensemble $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**, c'est-à-dire s'écrivant avec un nombre fini de chiffres derrière la virgule : $15,789\,;\,-47\,;\,-24,9876\,;\,3\,;\,\frac{1837}{10000}\,;\,\ldots$
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **rationnels**, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire comme une fraction d'un entier relatif divisé par un entier relatif non nul :
  $\frac{1}{3}\,;\,-4\,;\,-9374,94=\frac{-937494}{100}\,;\,\frac{12390}{4485}\,;\,\ldots$
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres **réels** regroupant les rationnels et les irrationnels : $\sqrt{2}\,;\,4\,;\,\frac{759}{8094}\,;\,\pi\,;\,-948\,;\,\sqrt{5}\,;\,\ldots$

Ces ensembles sont inclus les uns dans les autres de la façon suivante : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

I.2 Définition d'une fonction

Définition I.1

Une **fonction** f partant d'un ensemble A et allant dans un ensemble B, notée $f : A \to B$, est un opérateur qui a tout élément $a \in A$ lui associe un unique élément de $f(a) = b \in B$.

Exemple 1. Associer à tout élément sa nature :

f_1

Jupiter •	
Soleil •	• planète
Antarès •	
Terre •	• lune
Titan •	
Tatooine •	• étoile
Pandora •	

Donner alors f_1 (Jupiter) = ... et f_1 (Antarès) = ...

Exemple 2. La fonction f_2 qui ajoute 1 à tout entier naturel.

Quel est l'ensemble de départ ? ....

Que vaut $f_2(4)$? $f_2(38)$? ....
Compléter :

$$f_2 : \begin{array}{rcl} \ldots\ldots & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

Exemple 3. La fonction f_3 qui multiplie tout réel par 2 puis ajoute 3.

Quel est l'ensemble de départ ? ....

Que vaut $f_3(2)$? $f_3(5)$? ....
Compléter :

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \ldots\ldots & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ldots\ldots \end{array}$$

Quelle est la nature de la fonction f_3 ? ....

Définition I.2

1. Certaines fonctions ne peuvent agir sur l'ensemble de tous les réels, on appelle **ensemble de définition** le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel il est possible de faire agir f.
2. Soit f une fonction. Soient a et b deux réels tels que $f(a) = b$. On dit que b est **l'image** de a par f et a est un **antécédent** de b par f.

Remarque importante : chaque point a de l'ensemble de définition a ***une seule*** *image $f(a)$ mais il peut exister* ***plusieurs*** *antécédents d'un même point b.*

Quels sont les antécédents de « lune » par f_1 ? ....

Exemple 4. La fonction racine carrée $f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$.
Quel est l'ensemble de définition de f_4 ? $\mathscr{D}_{f_4} =$ ....

Quelle est l'image de 4 ? de 36 ? ....

Quelle est l'antécédent de 3 ? ....

I.3 Représentation graphique

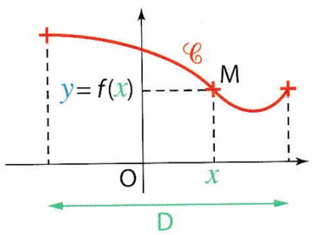
Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}.$$

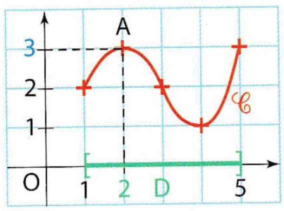
Définition I.3

Dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est l'ensemble des points de coordonnées

$$(x; f(x)) \qquad \text{où} \qquad x \in \mathscr{D}_f.$$



Conséquence : le point $M(x; y)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$.
Exemple 5. Soit f_5 une fonction définie sur l'intervalle $\mathscr{D}_f = [1; 5]$ dont la représentation graphique est donnée par :



Quelles sont les images de 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ?

. . . .

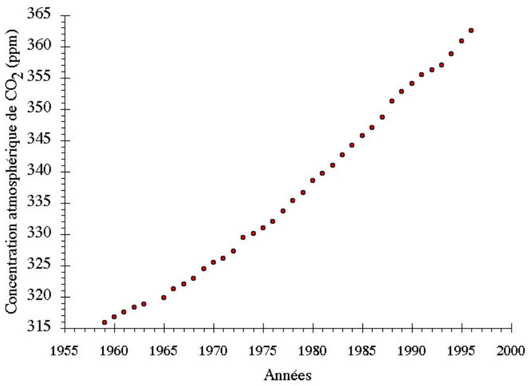
Quels sont les antécédents de 1 ? 2 ? 3 ?

. . . .

II Variations d'une fonction

II.1 Monotonie ou sens de variation

Depuis 1958, la station à Mauna Loa (Hawaï) mesure la concentration de CO_2 dans l'air. Le relevé annuel est donné dans la figure suivante.



Décrire l'évolution de la concentration du CO_2 au cours du temps.

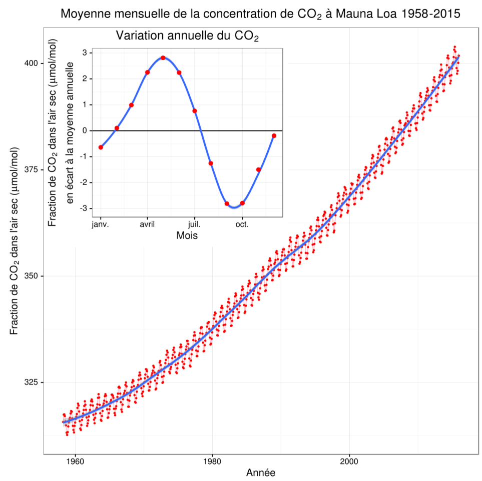
. . . .

Définition II.1

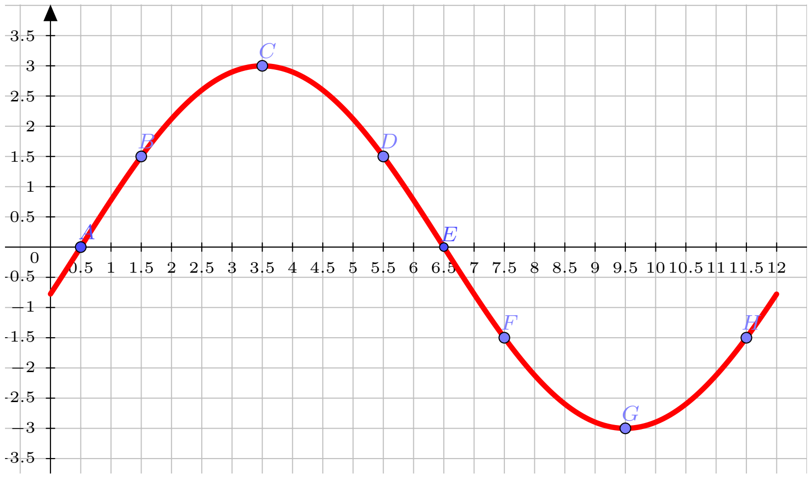
Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **croissante** sur I si et seulement si pour tout réels u et v dans I vérifiant $u \leqslant v$, on a
$$f(u) \leqslant f(v).$$
- La fonction f est dite **décroissante** sur I si et seulement si pour tout réels u et v dans I vérifiant $u \leqslant v$, on a
$$f(u) \geqslant f(v).$$

En regardant de plus près l'évolution de la concentration de CO_2, on s'aperçoit que durant une année la variation de la concentration du CO_2 change. On donne ci dessous un relevé plus précis appelé courbe de Keeling (nom du scientifique ayant initié ces mesures).



On modélise l'évolution de l'écart de la concentration de CO_2 par rapport à sa moyenne par la courbe suivante :



Les graduations en abscisse correspondent au mois de l'année : 0=01 janvier, 0.5=15 janvier, 1=01 février, 1.5=15 février, 2=01 mars, 2.5=15 mars, 3=01 avril etc. On note g la fonction donnant l'écart de concentration de CO_2 à la moyenne en fonction du temps.
Aux alentours du 1$^{\text{er}}$ Janvier la concentration de CO_2 augmente. Jusqu'à quelle date g est-elle croissante ?

. . . .

Donner l'intervalle de temps pour lequel g est décroissante.

. . . .

Quel est le comportement de g à la fin de l'année ?

. . . .

A votre avis, quel phénomène peut expliquer une telle variation ?

. . . .

. . . .

. . . .

II.2 Tableau de variation

Définition II.2

Lorsqu'une fonction est monotone (croissante ou décroissante) par morceaux (sur plusieurs intervalles consécutifs) on représente dans un tableau ses variations par des flèches :

- vers le haut lorsque f est croissante,
- vers le bas lorsque f est décroissante.

Ce tableau est appelé le **tableau de variation** de f.

Exemple 6. On reprend la fonction g donnant les variations de la concentration de CO_2 au cours de l'année. Compléter son tableau de variation :

x	0	3,5	...	12
g(x)		...		0.78
	-0,78		-3	

II.3 Maximum et minimum

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

Définition II.3

Soit $a \in I$ un point de I. On dit que $f(a)$ est

- un maximum de f sur I si et seulement si pour tout réel $x \in I$,

$$f(x) \leqslant f(a).$$

- un minimum de f sur I si et seulement si pour tout réel $x \in I$,

$$f(x) \geqslant f(a).$$

On reprend la fonction g donnant les variations de la concentration de CO_2 au cours de l'année. Quel est son maximum ? son minimum ?

....

En quelle valeur ce maximum est-il atteint ? Même question pour le minimum.

....

....