Chapitre XII : Equations de droites

I Définition et représentation

Rappel

- Toute fonction affine $x \mapsto ax + b$ admet pour courbe représentative une droite non verticale.
- Réciproquement toute droite non verticale est la représentation d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$.

Définition I.1

L'équation d'une droite non verticale, c'est-à-dire non parallèle à l'axe des ordonnées, est $y = a * x + b$ où

- a est le **coefficient directeur** de la droite,
- b est **l'ordonnée à l'origine**, c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

L'équation d'une droite verticale est $x = c$, où c est l'abscisse commune à tous les points de cette droite.

Exemple 1. Tracer les droites dont les équations sont données par :

$$d_1 : x = 4 \qquad d_2 : y = \frac{x}{3} + 1 \qquad d_3 : y = 5 - x$$
$$d_4 : y = 1 - \frac{x}{2} \qquad d_5 : y = -2.$$

II Calculs des coefficients

Proposition II.1

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Proposition II.2

Soit d une droite de coefficient directeur a et passant par un point $A(x_A; y_A)$. On calcule b l'ordonnée à l'origine de la droite en résolvant l'équation suivante d'inconnu b :

$$y_A = ax_A + b.$$

Exemple 2. Soient $A(-2;2)$, $B(3;4)$, $C(2;-1)$, $D(6;-1)$, $E(-4;6)$ et $F(1;-2)$ des points du plan repéré. Déterminer les équations des droites (AB), (CD) et (EF) puis les dessiner en annexe.

Exemple 3. Déterminer les équations des droites d_1, d_2 et d_3 données en annexe.

Définition II.3

Un **vecteur** directeur $\vec{u}$ d'une droite d est un vecteur $\vec{u}$ dont la direction est donnée par la droite d.

ATTENTION : une droite n'a pas un seul vecteur directeur mais une infinité car si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d alors tous les vecteurs $\lambda\vec{u}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) colinéaires à $\vec{u}$ sont aussi des vecteurs directeurs de d.

Remarque : soient A et B deux points du plan, le vecteur $\vec{AB}$ est toujours un vecteur directeur de la droite (AB).

Proposition II.4

Soient d une droite non verticale et $\vec{u}(x;y)$ un vecteur directeur de d. Le coefficient directeur de d est donnée par :

$$a = \frac{y}{x}.$$

Exemple 4. On reprend l'exemple 2.

1. Donner un vecteur directeur avec ses coordonnées pour chacune des droites suivantes : (AB), (CD), (EF).
2. Retrouver alors à l'aide de la proposition précédente le coefficient directeur de chacune de ces droites.

III Droites parallèles, droites sécantes

III.1 Parallélisme, alignement

Proposition III.1

Soient d et d' deux droites d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ respectivement avec a, b, a', b' quatre réels fixés.

- les droites d et d' sont parallèles si et seulement si $a = a'$.
- les droites d et d' sont sécantes si et seulement si $a \neq a'$.

Exemple 5. On considère les points $A(3;2)$, $B(1;-3)$, $C(7;-1)$ et $D(6;3)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? et les droites (AD) et (BC) ?

Proposition III.2

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (BC) sont alignés.

Exemple 6. Démontrer que les points $A(-3;-2)$, $B(-1;1)$ et $C(3;7)$ sont alignés.

III.2 Intersection

Soient d_1 la droite d'équation $y = 7x + 2$ et d_2 la droite d'équation $y = 3 - x$. Ces deux droites ne sont pas parallèles car le coefficient directeur de d_1 vaut 7 et est donc différent du coefficient directeur de d_2 qui vaut -1. Ces deux droites sont donc sécante en un unique point. Appelons $M(x_M; y_M)$ ce point d'intersection. Le point M appartient donc ET à d_1 ET à d_2. Puisque M est sur d_1 on a

$$y_M = 7x_M + 2.$$

De même M appartient à d_2, donc

$$y_M = 3 - x_M.$$

Les coordonnées du point M vérifient donc le **système d'équations** suivant

$$\begin{cases} y_M &= 7x_M + 2 \\ y_M &= 3 - x_M. \end{cases}$$

On résout ce système de la façon suivante :

$$\begin{cases} y_M &= 7x_M + 2 \\ y_M &= 3 - x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 7x_M + 2 \\ 7x_M + 2 &= 3 - x_M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 7x_M + 2 \\ 7x_M + x_M &= 3 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 7x_M + 2 \\ 8x_M &= 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 7x_M + 2 \\ x_M &= \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M &= 7 \times \frac{1}{8} + 2 = \frac{7}{8} + \frac{16}{8} = \frac{23}{8} \\ x_M &= \frac{1}{8} \end{cases}$$

Le point d'intersection est donc $M\left(\frac{1}{8}; \frac{23}{8}\right)$.

Exemple 7. On reprend l'exemple 1

1. Vérifier que les droites d_2 et d_3 sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.
2. Vérifier que les droites d_3 et d_4 sont sécantes et déterminer leur point d'intersection.