



## Chapitre XI : La fonction inverse

### I Définition

On rappelle que  $\mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  est l'ensemble des réels différents de 0.

#### Définition I.1

La **fonction inverse**  $f$  est la fonction qui à tout réel NON NUL associe son inverse :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

### II Représentation

Compléter le tableau suivant :

$x$		-4	-2	-1	-1/2		-1/5	0
$\frac{1}{x}$	-0,2					-4		

$x$	1/5		0,5	1	2	4	
$\frac{1}{x}$		4					0,2

A l'aide du tableau précédent, tracer la courbe représentative de la fonction inverse sur le graphique en annexe.

### III Propriétés

#### Proposition III.1

La fonction inverse est

- négative sur  $]-\infty; 0[$
- positive sur  $]0; +\infty[$ .

Son tableau de signes est donc

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

**Proposition III.2**

La fonction inverse est

- décroissante sur  $]-\infty; 0[$ ,
- décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

Son tableau de variations est donc

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$			

**Démonstration.** Soit  $x \leq y < 0$ . On constate que  $xy > 0$ . En conséquence :

$$\frac{x}{xy} \leq \frac{y}{xy} < \frac{0}{xy} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0.$$

On en déduit que la fonction inverse est décroissante sur  $]-\infty; 0[$ . De même pour  $0 < x < y$ , on a toujours  $xy > 0$ . Ainsi

$$\frac{0}{xy} < \frac{x}{xy} \leq \frac{y}{xy} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

A nouveau on en déduit que la fonction inverse est décroissante sur  $]0; +\infty[$ . □

## IV Signe d'un quotient

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{-3x + 8}{5x - 20}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?

Les seuls points  $x \in \mathbb{R}$  qui peuvent poser problème sont ceux pour lesquels le dénominateur s'annule (on ne divise jamais par 0 !) :

$$\begin{aligned} 5x - 20 &= 0 &\Leftrightarrow 5x &= 20 \\ &&\Leftrightarrow x &= \frac{20}{5} = 4. \end{aligned}$$

Donc la fonction n'est pas définie en 4. Son ensemble de définition est donc  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ .

2. Dresser le tableau de signes de  $f$ .

De la même façon que pour le degré 2, on a d'une part

$$\begin{aligned} -3x + 8 &\geq 0 &\Leftrightarrow -3x &\geq -8 \\ &\Leftrightarrow x &\leq \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Donc



$x$	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$-3x + 8$		$0$	

D'autre part, on a aussi :

$$\begin{aligned} 5x - 20 \geqslant 0 &\Leftrightarrow 5x \geqslant 20 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{20}{5} = 4. \end{aligned}$$

Donc

$x$	$-\infty$	$4$	$+\infty$
$5x - 20$		$0$	

En réunissant ces deux tableaux, on en déduit que

$x$	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	$4$	$+\infty$
$-3x + 8$		$0$		
$5x - 20$			$0$	
$\frac{-3x+8}{5x-20}$		$0$	$0$	

## Annexe

