Chapitre X : Probabilités

I Introduction, vocabulaire

Définition I.1

Une expérience est dite **aléatoire** lorsque plusieurs **issues** (ou résultats) sont possibles et que l'on ne peut pas prévoir quelle issue sera réalisée avant d'avoir pratiqué l'expérience.

Exemples : le lancer d'une pièce, d'un dé, le tirage d'une carte dans un paquet bien mélangé, le résultat du prochain match de foot etc.

Remarque : dire si une expérience est *aléatoire* ou non dépend essentiellement du modèle que l'on souhaite poser sur notre expérience et des informations que l'on possède sur ce modèle. Si l'on connaît parfaitement les facteurs physiques influençant le lancer d'une pièce, on peut considérer ce lancer comme non-aléatoire. Au contraire si l'on refuse de s'informer sur la météo avant de sortir, on peut considérer le fait qu'il pleuve ou non au moment de sortir comme un phénomène aléatoire.

Définition I.2

L'univers E est l'ensemble des issues possibles de l'expérience.

Si l'expérience possède $n \in \mathbb{N}^*$ issues différentes possibles, notées x_1, x_2, $\ldots$, x_n. L'univers E s'écrit alors

$$E = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}.$$

On travaillera dans tout ce chapitre avec un univers E fini, c'est-à-dire avec une nombre d'issues possibles fini.

Exemple 1. Pour chacune des expériences, donner l'univers associé.

1. Le lancer d'un pièce.
2. Le lancer d'un dé à six faces.
3. Le tirage d'une lettre au scrabble
4. La somme de deux dés à 6 faces.

Définition I.3

En théorie des probabilités, à chaque issue $x_1, \ldots, x_n$, on associe un réel $p_1, \ldots, p_n$ tel que

$$0 \leqslant p_1, \ldots, p_n \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad p_1 + \cdots + p_n = 1.$$

Le réel p_1 est appelé la **probabilité** de réaliser x_1. De même le réel p_2 est la probabilité d'avoir x_2 etc.

Exemple 2.

1. Dans le pile ou face équilibré, donner à chaque issue sa probabilité.
2. On jette un dé équilibré. Donner à chaque issue sa probabilité.

II Evènements

II.1 Définition

Définition II.1

Un **évènement** est un sous-ensemble de l'univers.

Exemple 3. On lance un dé à six faces. L'évènement A : « le résultat du dé est inférieur ou égal à trois » s'écrit :

$$A = \{1; 2; 3\}.$$

L'évènement A est bien un sous-ensemble de l'univers $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Exemple 4. On considère toujours le lancer d'un dé à six faces. Ecrire les évènements suivants.

1. Evènement A : le résultat du dé est pair.
2. Evènement B : le résultat du dé n'est ni 1 ni 5.
3. Evènement C : le résultat du dé est divisible par 3 et par 2.

Vocabulaire

- L'évènement E est appelé l'évènement certain.
- L'ensemble vide $\emptyset$ est appelé l'évènement impossible.
- Un évènement ne contenant qu'une seule issue $\{x_i\}$ est appelé évènement élémentaire.

II.2 Probabilité d'un évènement

Définition II.2

Soit A un évènement. La probabilité de réaliser l'évènement A, notée $p(A)$ est donnée par la somme des probabilités des issues contenues dans A.

Exemple 5. On lance un dé équilibré. L'univers est donc $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et les probabilités des issues sont $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$. On considère l'évènement A « le résultat du dé est inférieur ou égal à trois » : $A = \{1; 2; 3\}$. La probabilité d'obtenir A est donnée par :

$$p(A) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 6. On considère le lancer d'un dé équilibré. Donner les probabilités des évènements A, B et C de l'exemple 4.

III Calculs de probabilités

III.1 Le cas équiprobable

Définition III.1

Une expérience est dite **équiprobable** si toutes les issues de l'expérience ont la même probabilité de se produire.

Proposition III.2

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'univers d'une expérience avec n issues possibles. Si l'expérience est équiprobable alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$p\left(x_i\right) = \frac{1}{n}.$$

Démonstration. Puisque l'expérience est équiprobable, par définition toutes les issues ont la même probabilité. Notons p cette probabilité commune :

$$p\left(x_1\right) = p\left(x_2\right) = \cdots = p\left(x_n\right) = p.$$

L'ensemble E est l'évènement certain. Donc

$$1 = p(E) = p\left(x_1\right) + p\left(x_2\right) + \cdots + p\left(x_n\right) = \underbrace{p + p + \cdots + p}_{n \text{ fois}} = n \times p.$$

Nous avons ainsi montré que $1 = np$ et donc

$$p = \frac{1}{n}.$$

□

Exemple 7. Le professeur demande aléatoirement et de façon équiprobable (dit encore de façon uniforme) à un élève d'une classe de 32 élèves de venir au tableau. Quelle est la probabilité pour chaque élève d'avoir la chance d'aller au tableau ?

Proposition III.3

Soit A un évènement d'une expérience équiprobable. On a

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues total}}$$

III.2 Calculs de probabilités

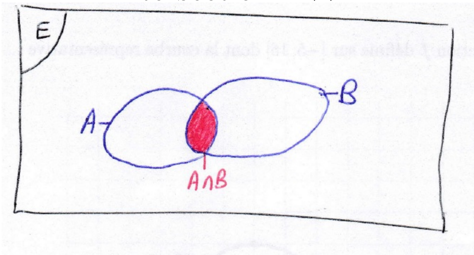
III.3 Par des formules

Définition III.4

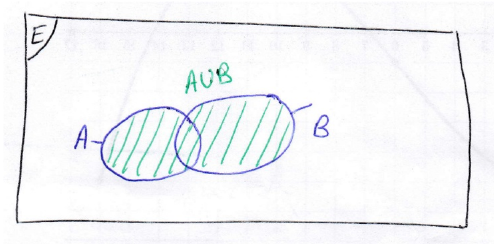
Soient A et B deux évènements d'un univers E.

- **L'intersection** de A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments (ou issues) qui appartiennent à la fois à l'évènement A et à la fois à l'évènement B.
- **L'union** de A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments (ou issues) qui appartiennent ou à A ou à B.

Intersection $A \cap B$



Union $A \cup B$



Exemple 8. On reprend l'exemple 4 et les évènements A et B associés. Déterminer les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$.

Proposition III.5

Soient A et B deux évènements d'un univers E. On a :

$$p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(A \cap B\right).$$

Cas particulier

Si les évènements A et B sont **disjoints**, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, alors

$$p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right).$$

Exemple 9. Vérifier cette formule avec les évènements A et B de l'exemple 4.

Définition III.6

Soit A un évènement d'un univers E. L'évènement **contraire** (ou complémentaire) de A, noté $\bar{A}$ est l'ensemble des éléments (ou issues) de l'univers qui ne sont pas dans A.

Exemple 10. Décrire les évènements contraires des évènements A, B et C de l'exemple 4.

Proposition III.7

Soit A un évènement d'un univers E. La probabilité de l'évènement contraire à A est donnée par :

$$p\left(\bar{A}\right) = 1 - p\left(A\right).$$

Exemple 11. Vérifier cette formule avec les évènements B et $\bar{B}$ de l'exemple 4.

III.4 Par un arbre

On pioche au hasard un nucléotide dans un brin d'ADN d'une bactérie *Haemophilus influenzae* (son génome de 1.930.140 paires de nucléotides a été le premier entièrement séquencé en 1995). On suppose que les probabilités sont données dans le tableau suivant :

Nucléotide	a	c	g	t
Probabilité de tirage	$0,31$	$0,18$	$0,20$	$0,31$

On réitère le même tirage une seconde fois et l'on représente cette expérience sous la forme d'un arbre. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins un a ?