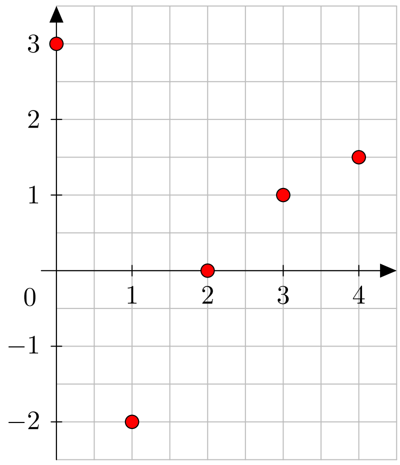
Nom :

Prénom :

Contrôle 3

Le barème est donné à titre indicatif. Une attention particulière à la qualité de la présentation de la copie et à la clarté des raisonnements est attendue. Calculatrice autorisée.

Exercice 1.*(6 points)* Sur le graphique ci-dessous on a représenté les premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



1. Déterminer u_0, u_2 et u_4.
2. Quel est l'indice du terme de la suite valant 1 ?
3. Cette suite est-elle croissante ? décroissante ? ni l'un ni l'autre ? Justifier.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2}n.$$

4. Remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4
v_n					

5. Placer les cinq premiers termes de la suite dans le graphe ci-dessus.
6. Cette suite est-elle croissante ? décroissante ? ni l'un ni l'autre ? Justifier.

Prière de tourner la page.

Exercice 2.*(4 points)* Grâce à du baby-sitting, Kassandra gagne 8 € par semaine. On note u_n l'argent que possède Kassandra la semaine n.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. La suite est-elle croissante ? décroissante ? ni l'un ni l'autre ? Justifier.
3. Calculer u_1 et u_2
4. A partir de combien de semaines, Kassandra aura-t-elle gagné 32 € ? Justifier.
5. *(Bonus)* En réalité dès que Kassandra a économisé 32 €, la semaine suivante, elle ne fait pas de baby-sitting mais dépense tout pour acheter un beau bouquet de fleurs à sa maman. Elle recommence à économiser la semaine d'après. Compléter la nouvelle définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dots\dots\dots & \text{si} \quad \dots\dots\dots < 32 \\ u_{n+1} = \dots\dots\dots & \text{si} \quad \dots\dots\dots = 32 \end{cases}$$

Exercice 3.*(10 points)*.
Une ville compte, en 2015, 30000 personnes de moins de 20 ans et 25000 personnes de plus de soixante ans. Une étude montre que la population croît de la façon suivante :

- Le nombre de personnes de moins de 20 ans augmente de 500 personnes tous les cinq ans.
- Le nombre de personnes de plus de 60 ans augmente de 10% tous les cinq ans.

On suppose que ces règles seront respectées dans les années à venir. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre de personnes de moins de 20 ans l'année $2015+5n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre de personnes de plus de 60 ans l'année $2015+5n$.

1. Que vaut u_0 ? v_0 ?
2. Calculer u_1 le nombre de personnes de moins de 20 ans en 2020.
3. En déduire u_2, u_3 puis u_4.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ? ni l'un ni l'autre ? Justifier.
6. Calculer le nombre de nouvelles personnes ayant plus de 60 ans en 2020.
7. En déduire v_1 le nombre de personnes ayant plus de 60 ans en 2020.

On peut montrer que pour tout entier n,

$$v_n = (1,1)^n 25000.$$

8. Calculer v_2, v_3 puis v_3.
9. A partir de quel indice la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépasse-t-elle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
10. En déduire à partir de quelle année la population de plus de 60 ans sera plus nombreuse que la population de moins de 20 ans (attention on va de 5 ans à 5 ans).
11. *(Bonus)* On suppose que dans un tableur nous avons rentré les indices dans la colonne A. Quelle formule faudrait-t-il remplir dans la case $B1$ pour qu'en la faisant glisser sur les cases du bas, nous obtenons dans la colonne B les valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?