Chapitre V : la loi binomiale.

I L'expérience de Bernoulli

Définition I.1

On appelle expérience de **Bernoulli** une expérience aléatoire ayant exactement **deux** issues possibles.

Exemple 1. Parmi les expériences suivantes sont-elles des expériences de Bernoulli ?

1. On lance une pièce et l'on regarde si l'on tombe sur pile ou sur face. . . . .
2. On jette un dé et l'on regarde le résultat du dé. . . . .
3. On jette un dé et l'on regarde si le résultat est plus grand que 5 ou non. . . . .
4. On pioche une carte et l'on regarde si elle est rouge ou noire. . . . .
5. On demande à une personne si son sport préféré est le foot, le basket ou ni l'un ni l'autre.

   . . . .

Remarques :

i On appelle souvent *succès*, noté S, l'issue sur laquelle se porte notre attention et *échec*, noté $\bar{S}$ son contraire.

ii On note souvent p la probabilité d'obtenir un succès : $p = p(S)$.

Exemple 2. Dans les expériences de Bernoulli suivantes expliciter à chaque fois le succès S et son contraire $\bar{S}$.

1. On regarde quand une pièce tombe sur pile.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

2. On souhaite obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 en lançant un dé à six faces.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

3. On tire une carte au hasard et l'on veut savoir si c'est pique ou non.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

4. On choisit une personne au hasard et l'on souhaite savoir si elle a déjà voyagé en dehors de la France ou non.

   ....

   ....

   ....

Proposition I.2

La donnée de la probabilité p d'obtenir un succès suffit à décrire entièrement l'expérience de Bernoulli, car

$$p(S) = p \qquad \text{et} \qquad p\left(\bar{S}\right) = 1 - p.$$

Exemple 3. Dans les expériences de Bernoulli suivantes expliciter à chaque fois la probabilité d'obtenir un succès ainsi que celle de son contraire.

1. Thomas propose à Yann de jouer à pile ou face avec lui. Thomas annonce à Yann qu'il gagne lorsque la pièce tombe sur pile. Mais ce que Yann ignore c'est que la pièce est truquée et ne tombe que 3 fois sur 10 sur pile.

   ....

   ....

2. Pendant son absence, Zohra demande à Gabrielle de nourrir son chat. Elle la prévient cependant : « Tu auras 60% de le trouver dans le salon. Sinon c'est qu'il sera sorti ».

   ....

   ....

3. Victoria et Yasmine jouent au handball tous les weekends et ne perdent en moyenne que toutes les cinq semaines.

   ....

   ....

II Le schéma de Bernoulli

II.1 Définition

Définition II.1

On appelle **schéma de Bernoulli** l'expérience qui consiste à réaliser plusieurs fois, à **l'identique** et de façon **indépendante** une expérience de Bernoulli.

Exemple 4. Parmi les expériences suivantes lesquelles sont des schémas de Bernoulli ?

1. Je lance quatre fois un dé à dix faces (numérotées de 0 à 9). A chaque fois, je gagne si j'obtiens un nombre supérieur ou égal à 3.

   ....

   ....

2. Je possède un grand sac contenant 9 boules rouges, 12 boules oranges et 15 boules vertes. Je sors à chaque fois une boule au hasard du sac et je gagne si j'obtiens une boule verte. Je réitère l'expérience cinq fois et je garde à chaque fois les boules que j'ai piochées devant moi.

....

....

3. Je jette deux dés à 6 faces. Je gagne si les deux dés affichent le même résultat. Je renouvelle l'expérience six fois.

....

....

4. Je lance un dé à six faces jusqu'à ce que j'obtienne un 6.

....

....

Proposition II.2

Un schéma de Bernoulli possède deux paramètres :

- p représente la probabilité de succès de l'expérience de Bernoulli associée.
- n représente le nombre d'expériences de Bernoulli réalisées.

Exemple 5. Pour chacun des schémas de Bernoulli suivants, donner les paramètres n et p associés.

1. On lance quatre fois une pièce ayant 40% de chance de tomber sur pile.

....

....

2. On possède un sac de scrabble contenant 20 consonnes et 14 voyelles. On gagne lorsque l'on tire une voyelle. On pioche à trois reprises une lettre, on note si l'on a gagné ou non puis on remet la lettre dans le sac.

....

....

3. On lance à trois reprises un dé à six faces. On gagne si le résultat du dé est divisible par trois.

....

....

II.2 Représentation par un arbre

On reprend l'exemple 5.1. On représente les différentes situations par l'arbre suivant :

La probabilité d'obtenir 4 piles est alors de ....
La probabilité d'obtenir au moins deux piles est de

....

....

....

Application 1.

1. Dans l'exemple 5.2, quelle est la probabilité lors de l'expérience d'avoir pioché deux consonnes et une voyelle ?

   ....

   ....

   ....

2. Dans l'exemple 5.3, quelle est la probabilité d'avoir gagné au moins une fois ?

. . . .

. . . .

II.3 A l'aide de la calculatrice

Lorsque le paramètre n (nombre d'expériences de Bernoulli répétée) est trop grand pour tracer l'arbre, on peut obtenir le résultat sur calculatrice.

Exemple 6. Asma et Sofiane s'ennuient le dimanche et pour s'occuper décident de jouer au jeu suivant : ils regardent les voitures passer et gagnent si la voiture est de couleur bleue ou noire et perdent dans le cas contraire. On suppose que la probabilité de voir passer une voiture de couleur bleue ou noire est de $0,3$. Quelle est la probabilité de gagner six fois sur dix voitures ?

Dans la calculatrice, appuyer sur *[DISTRIB]* (*[2DE]* puis *[VAR]*). Sélectionner la ligne *[A :binomFdp(]* et faire entrer. Donner les paramètres du schéma de Bernoulli : nbreEssais (n) puis p puis valeur de x. Faire entrer à deux reprises pour obtenir le résultat souhaité.

. . . .

. . . .

. . . .

Application 2. Un élève répond au hasard dans un QCM de 20 questions contenant chacune 4 choix possibles. Un point est accordé par bonne réponse et 0 sinon (pas de points négatifs pour les mauvaises réponses). Quelle est la probabilité d'obtenir la moyenne ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

III La loi binomiale

III.1 Définition

Définition III.1

On note **X** le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètre n et p. Ce résultat aléatoire X est appelé **variable aléatoire** et on dit qu'il suit **une loi binomiale** de paramètre n et p, notée $\mathscr{B}(n, p)$.

Définition III.2

Soient $n \geqslant 1$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note $\mathbb{P}(X = k)$, respectivement $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et $\mathbb{P}(X \geqslant k)$, la probabilité que le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli soit égal, respectivement inférieur ou égal et supérieur ou égal, au nombre k.

Remarques :

1. On a les définitions analogues pour $\mathbb{P}(X < k)$ et $\mathbb{P}(X > k)$.
2. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant k) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \cdots + \mathbb{P}(X = k) \\
\mathbb{P}(X \geqslant k) &= \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = k+1) + \cdots + \mathbb{P}(X = n) \\
\mathbb{P}(X < k) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \cdots + \mathbb{P}(X = k-1) \\
\mathbb{P}(X > k) &= \mathbb{P}(X = k+1) + \mathbb{P}(X = k+2) + \cdots + \mathbb{P}(X = n).
\end{aligned}$$

Exemple 7. On considère un sac contenant 15 boules rouges et 30 boules noires. On gagne lorsque l'on tire une boule rouge et on effectue 12 tirages. On note X le nombre de succès.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 12)$. . . . .
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$. . . . .
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 8)$. . . . .
4. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$. . . . .

   . . . .

   . . . .

   . . . .
5. Calculer $\mathbb{P}(X > 7)$.

   . . . .

   . . . .

   . . . .
6. Calculer $\mathbb{P}(X < 10)$.

   . . . .

   . . . .

   . . . .

Indication : dans le cas d'inégalité, on se ramènera toujours à la probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ que l'on calculera à l'aide de de la calculatrice *[DISTRIB]* et *[B :binomFrép(]*.

III.2 Représentation graphique

Exemple 8. On reprend la situation du paragraphe II.2 et l'on note X le nombre de succès.

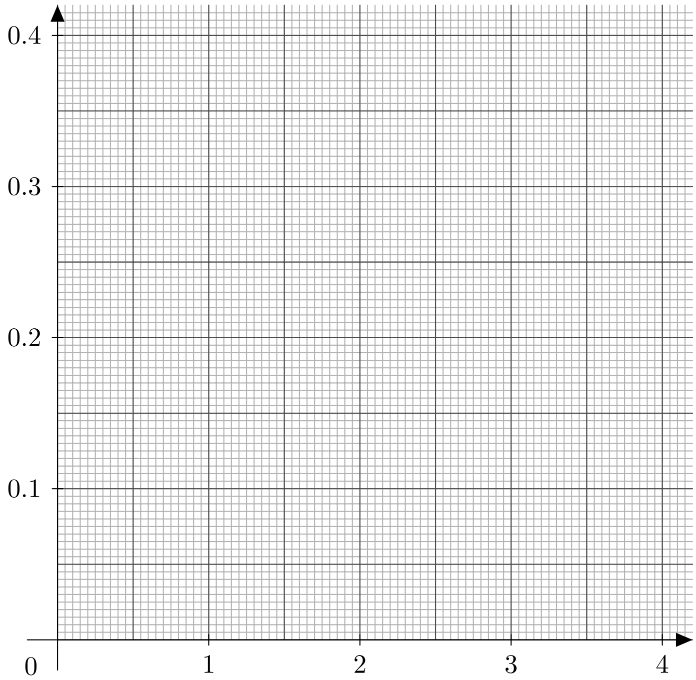
1. Rappeler les paramètres n et p de la loi binomiale obtenue.

   . . . .

2. A l'aide de l'arbre du paragraphe II.2, compléter le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$					

3. En déduire une représentation de la loi binomiale $\mathscr{B}(4, 0, 4)$.



Définition III.3

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. On appelle espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$ le réel

$$\mathbb{E}(X) = np.$$

Exemple 9. Calculer les espérances des schémas de Bernoulli de l'exemple 5.

1. . . . .

   . . . .

2. ....

....

3. ....

....

Proposition III.4

Lorsque n est suffisamment grand, le nombre de succès est alors proche de l'espérance $\mathbb{E}(X) = np$.

Application 3. On va vérifier cette propriété ensemble. Chaque élève lance dix fois un dé à dix face. A chaque lancer, l'élève obtient un succès si le résultat du dé vaut 1, 2 ou 3.

1. Quel est ton nombre du succès ?

   ....

   ....

2. Quel est le nombre de succès de la classe ?

   ....

   ....

   ....

3. Quelle est la loi binomiale associée à l'expérience ?

   ....

   ....

4. Quelle est l'espérance associée ? Comparer à la valeur obtenue à la question 2.

   ....

   ....

   ....