La dérivation des polynômes de degré 2 et 3.

I Dérivation des polynômes de degré 2

I.1 Rappels

On considère la fonction trinôme suivante. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 + 3x - 10.$$

1. Donner les coefficients a, b et c de la fonction.

   ....

   ↪ **Le coefficient a est le coefficient devant ...., b est le coefficient devant .... et c est le coefficient devant ....**

2. Quel est l'ordonnée à l'origine de la fonction ?

   ....

   ↪ **L'ordonnée à l'origine est toujours donnée par ....**

3. Comment est orientée la parabole associée à f ? Justifier.

   ....

   ↪ **Lorsque ...., la parabole est orientée vers le haut et au contraire lorsque ...., la parabole est orientée vers le bas.**

4. Déterminer l'abscisse du sommet de la parabole.

   ....

   ↪ **L'abscisse du sommet est donnée par $x_0 =$ ....**

5. Calculer le discriminant Δ associé à f.

   ....

   ....

   ↪ **Le discriminant est donnée par $\Delta =$ ....**

6. En déduire si la fonction admet 0, 1 ou 2 racines et s'il en existe, les calculer.

   ....

   ....

   ....

↪ **Si Δ .... alors la fonction n'a aucune racine.**
Si Δ .... alors la fonction a une unique racine donnée par $x_0 =$ ....
Si Δ .... alors la fonction a deux racines données par $x_1 =$ .... **et** $x_2 =$ ....

7. En déduire la forme factorisée de f.

....

....

....

I.2 Tableau de signe

Exemple 1. Considérons la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^2 - x + 2.$$

Les coefficients sont $a = -1$, $b = -1$ et $c = 2$. Son discriminant vaut donc

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9.$$

On en déduit que f possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

De plus, comme $a = -1 < 0$, on en déduit que la parabole est orientée vers le bas. D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Application 1. Dresser le tableau de signe des fonctions du second degré suivantes :

$$f_1(x) = x^2 + 2x - 8 \qquad f_4(x) = 4x^2 + 12x + 9$$
$$f_2(x) = -x^2 - 2x - 3 \qquad f_5(x) = x^2 - x - 6$$
$$f_3(x) = 6x^2 + 5x + 6 \qquad f_6(x) = -2x^2 + 6x - \frac{5}{2}.$$

I.3 Définition de la dérivation

Proposition I.1

Soit f une fonction une fonction polynôme du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec a, b et c trois réels. On appelle **fonction dérivée** de f, notée $\mathbf{f'}$, la fonction affine suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Application 2. Compléter le tableau suivant :

Expression de f	Expression de f'
$f_1(x) = -0,5x^2 + x + 1$	
$f_2(x) = -2x^2 - 4x - 10$	
$f_3(x) = \frac{x^2}{2} + 10x - 4$	
$f_4(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 5x - 1$	
$f_5(x) = 0,1x^2 + \frac{x}{3} - 1$	
$f_6(x) = -2x^2 - 1$	

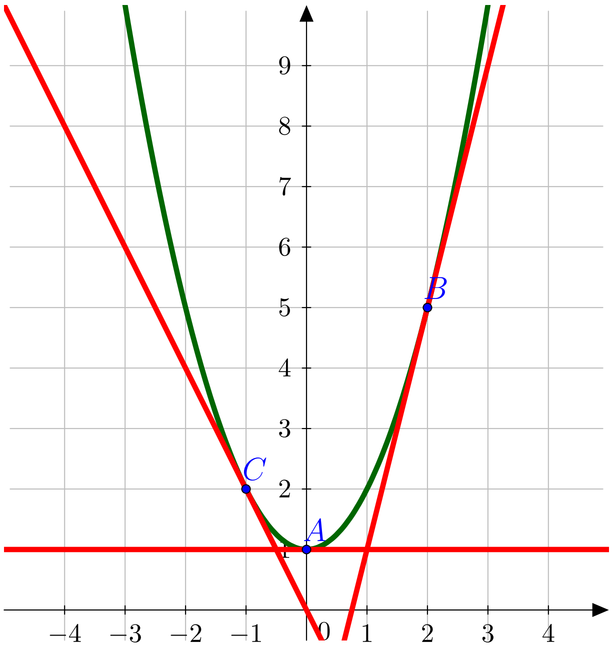
II Applications : tangente et sens de variation

II.1 Tangente

Définition II.1

Soit f une fonction dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ passe par le point M de coordonnées $(x_M; y_M)$. La tangente $\mathscr{T}$ est l'unique droite qui passe par le point M et qui approche le mieux la courbe $\mathscr{C}_f$ au « voisinage » de ce point.

Exemple 2. Tracer à la calculatrice la fonction $f(x) = x^2+1$ puis les droites $y = 1$; $y = 4x-3$ et $y = -2x$ puis zoomer sur chacun des points $A(0; 1)$; $B(2; 5)$ et $C(-1; 2)$.



Calculer $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-1)$. A quoi ces nombres correspondent-ils ?

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition II.2

Soit f une fonction polynôme du second degré dont le graphe $\mathscr{C}_f$ passe par un point $M\,(x_M; y_M)$. Alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $M\,(x_M; y_M)$ est l'unique droite passant par M dont le coefficient directeur est donné par $f'(x_M)$ la dérivée de f évaluée à l'abscisse x_M.

Exemple 3. Soient f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = -2x^2 + x + 1$ et M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'abscisse -1.

1. Calculer l'ordonnée de M.

   ....

   ....

2. Calculer la dérivée de f.

   ....

   ....

3. Evaluer la dérivée de f à l'abscisse $x = -1$.

   ....

   ....

4. On considère $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M et l'on note son équation par $y = ax + b$. A l'aide de la question précédente calculer a.

   ....

5. Puisque la tangente $\mathscr{T}$ passe par M elle doit vérifier $y_M = ax_M + b$. A l'aide de cette équation trouver la valeur de b.

   ....

   ....

   ....

Application 3. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

....

....

....

....

....

....

....

II.2 Sens de variation

Proposition II.3

Soient f une fonction polynôme du second degré et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Application 4. Soit f la fonction polynôme du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 3x - 10.$$

1. Déterminer la dérivée de f.

    ....

    ....

    ....

2. Dresser le tableau de signe de f' et retrouver le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		0	
f			

....

....

....

....

....

....

III Dérivation des polynômes de degré 3.

III.1 Définition des polynômes de degré 3.

Définition III.1

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction polynôme de degré** 3 s'il existe $aneq0$, b, c et d quatre réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Attention : il ne faut pas confondre le coefficient a, b et c avec ceux d'une fonction du second degré. Ici le coefficient a correspond au nombre de x^3, le coefficient b au nombre de x^2 et c au nombre de x.

Le signe de la fonction quand $x \to +\infty$ est celui du coefficient a.

Exemple 4. Donner les coefficients des fonctions polynômes de degré 3 suivantes :

$$f(x) = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + x - \frac{7}{12}, \qquad g(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2},$$
$$h(x) = x^3, \qquad i(x) = 2x^3 + x - 1.$$

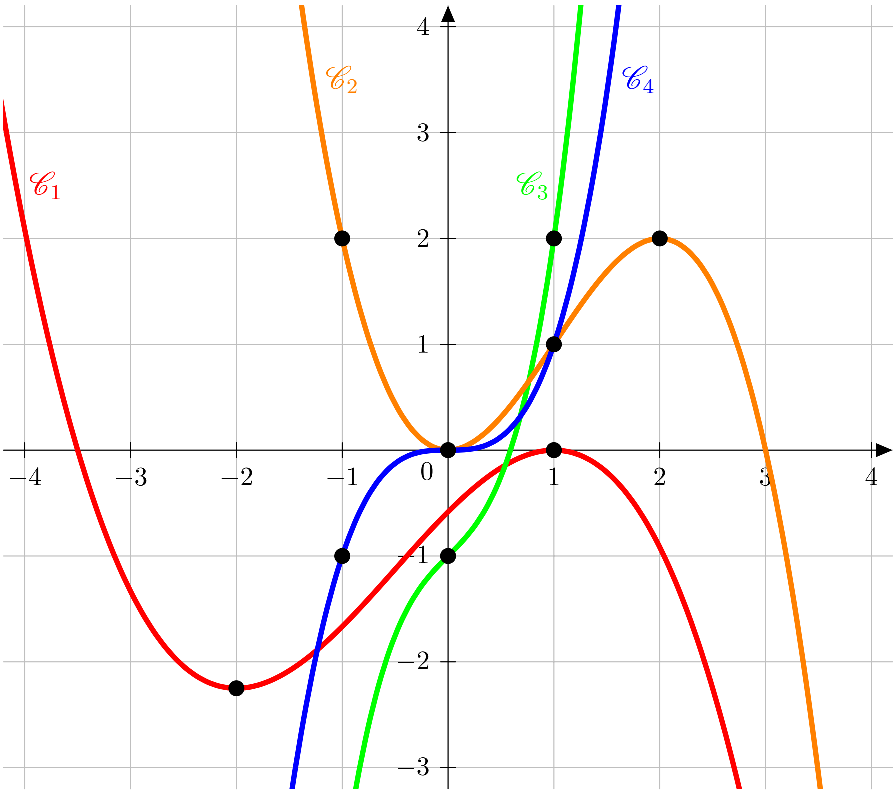
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Application 5. Relier chaque fonction f, g, h et i à son graphe représenté ci-dessous.



Application 6. Etablir à l'aide d'une lecture graphique les tableaux de variations des fonctions f, g, h et i.

III.2 Dérivation des polynômes de degré 3.

Définition III.2

Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction polynôme de degré 3. **La fonction dérivée** de f, toujours notée f' est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Application 7. Dériver les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x + 2, \qquad f_2(x) = -8x^3 + \frac{x^2}{6} + \frac{3x}{7} - 2,$$
$$f_3(x) = 45x^3 + 92x, \qquad f_4(x) = (3-x)(2x^2 + x - 4),$$
$$f_5(x) = 23x^2 + 9 - 61x + 5x^3, \qquad f_6(x) = 7x^3.$$

....

....

....

....

....

....

III.3 Applications

Les propositions II.2 et II.3 restent vraies si l'on remplace fonction polynôme du second degré par fonction polynôme de degré 3 :

Proposition III.3

Soit f une fonction polynôme de degré 3 dont le graphe $\mathscr{C}_f$ passe par un point $M\,(x_M; y_M)$. Alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $M\,(x_M; y_M)$ est l'unique droite passant par M dont le coefficient directeur est donné par $f'(x_M)$ la dérivée de f évaluée à l'abscisse x_M.

Proposition III.4

Soient f une fonction polynôme de degré 3 et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, on a $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Application 8.

1. Calculer les dérivées des fonctions f, g, h et i de l'exemple 4.
2. Pour chacune des fonctions f', g', h' et i' établir leurs tableaux de signes
3. En déduire à l'aide de la proposition III.4 les tableaux de variations de f, g, h et i et vérifier que l'on retrouve les résultats de l'application 6.