# Les suites, généralités

## I Introduction

**Exemple 1**.
Le soleil est une étoile de taille moyenne qui connaît des transformations au cours de sa vie. La phase actuelle du soleil est la plus longue et dure environ 10 milliards d'années. Durant cette phase, appelée séquence principale, le coeur du soleil se contracte lentement entrainant une augmentation de sa luminosité. On estime actuellement que la luminosité du soleil augmente de $0,94\%$ tous les 100 millions d'années. On sait de plus que la Terre reçoit de nos jours une luminosité du soleil de $341w/m^2$.

1. Quelle sera la luminosité reçue par la Terre dans $100Ma$ ($1Ma = 1$ million d'année) ?

   ...............................................................................

2. Quelle sera la luminosité reçue par la Terre dans $200Ma$ ?

   ...............................................................................

3. On appelle $u_0$ la luminosité actuelle, $u_1$ la luminosité dans $100Ma$, $u_2$ la luminosité dans $200Ma$. Suivant cette logique, que représentera $u_3$ ? Le calculer.

   ...............................................................................

4. Remplir le tableau suivant.

   ...............................................................................

   ...............................................................................

| Nombre d'années (en $Ma$) | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Indice associé $n$ | | | | | | |
| Luminosité $u_n$ (en $w/m^2$) | | | | | | |

## II Définition

**Définition II.1**

Une **suite** est une liste de nombres réels $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $\ldots$ que l'on numérote/indice par les entiers naturels 0, 1, 2, 3, $\ldots$. On note une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

**Exemple 2**. On considère le relevé annuel du taux d'évolution du PIB de la France en volume (c'est-à-dire hors inflation) depuis 2010.

| Année | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| PIB (en %) | $0,2$ | $-2,9$ | $2$ | $2,1$ | $0,2$ | $0,6$ | $0,6$ | $1,3$ |

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie de la façon suivante : pour $n \geqslant 0$, on note $u_n$ le PIB de la France l'année $2008 + n$.

1. A quoi correspond $u_0$ ? Quelle est sa valeur ? ..........................................

   ..........................................................................................

2. Que représente $u_5$ ? Quelle est sa valeur ? ..........................................

   ..........................................................................................

3. Est-il vrai que $u_3 > u_6$ ? Justifier. ..........................................

   ..........................................................................................

**Exemple 3**. Au fond du jardin, on plante deux arbres : un chêne de 2 mètres et un bouleau de $0,5$ mètre de hauteur. On sait que chaque année, le chêne pousse de $0,25m$ tandis que le bouleau pousse de $0,75m$. On souhaite représenter la taille du chêne par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celle du bouleau par une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Que représente l'indice $n$ ? ..........................................
2. Que représente alors $u_n$ ? $v_n$ ? ..........................................
3. Quelle est la valeur de $u_0$ ? de $v_0$ ? ..........................................
4. Calculer la valeur de $u_1$ et de $v_1$ ..........................................
5. Remplir le tableau suivant.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | | | | | | | | | | | |
| $v_n$ | | | | | | | | | | | |

**Définition II.2**

- Le nombre $u_0$ est appelé le terme de rang 0,
- le nombre $u_1$ est appelé le terme de rang 1,

  $\vdots$
- le nombre $u_n$ est appelé le terme de rang $n$.

**Application 1**. On reprend l'exemple 2.

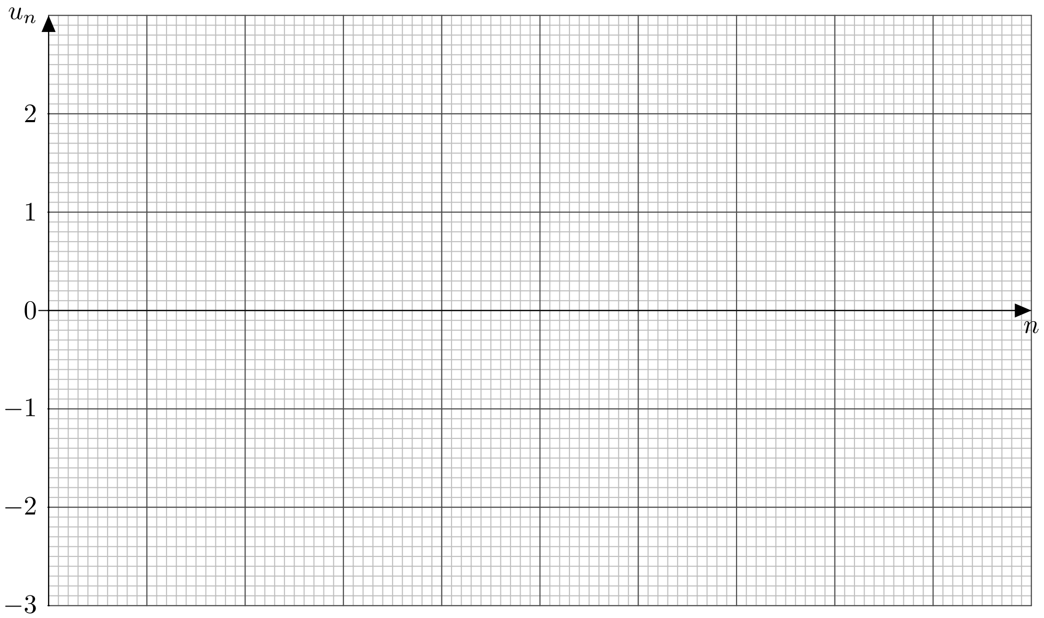
1. Quel est la valeur du terme de rang 4 ? ..........................................
2. Quel est le rang du terme valant $1,3\%$ ? ..........................................

# III Représentation graphique

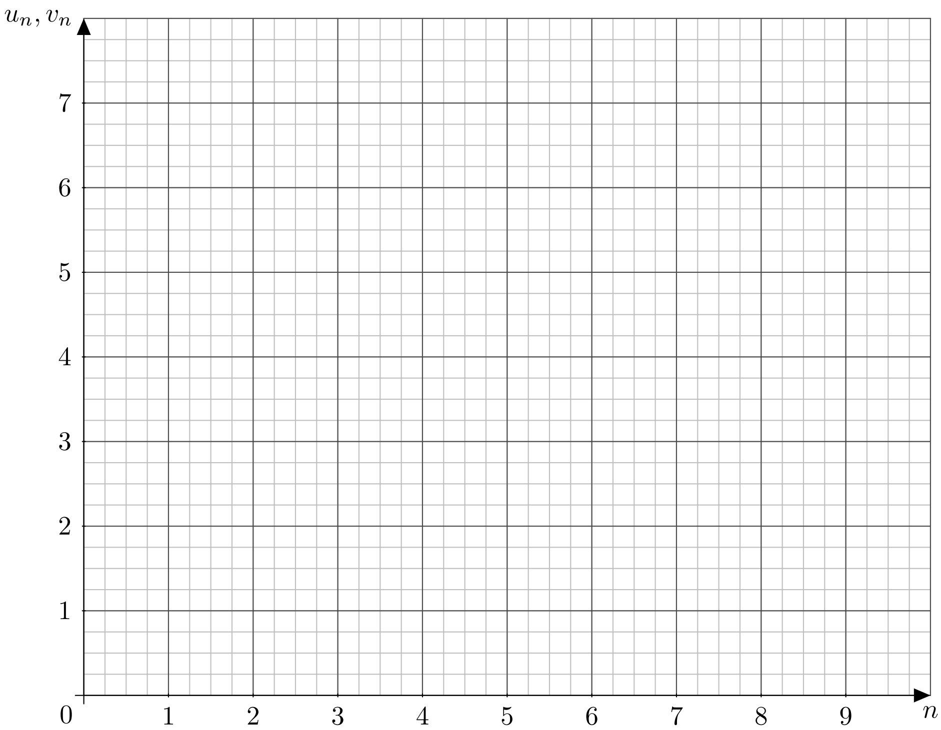
**Définition III.1**

Représenter graphiquement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (jusqu'au rang $N$), c'est tracer dans un repère l'ensemble des points $U_n$ dont les coordonnées sont $(n; u_n)$ (avec $0 \leqslant n \leqslant N$).

**Application 2**. Tracer dans le repère ci-dessous la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple 2.




**Application 3**. Tracer dans le repère ci-dessous les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple 3.



# IV Variation

**Définition IV.1**

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si **pour tout** entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_n \ldots\ldots\ldots u_{n+1}.$$
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si et seulement si **pour tout** entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_n \ldots\ldots\ldots u_{n+1}.$$

**Application 4.**

1. Dans l'exemple 2, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? Justifier.

   ..........................................................................................

2. Dans l'exemple 3, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble-t-elle croissante ? et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

   ..........................................................................................

# V Comment définir une suite

## V.1 Par énumération

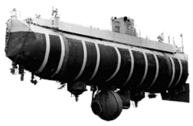
On donne directement la valeur numérique de chaque élément de la suite.

Dans l'exemple 2, la valeur du $u_n$ du PIB l'année $2008 + n$ est donnée directement par le tableau. Une telle façon de construire une suite n'est pas en général dans l'esprit de ce chapitre. Nous allons voir dans les exemples que les deux constructions des paragraphes suivants sont nettement plus efficaces.

## V.2 Par une formule algébrique

On donne une unique formule permettant de calculer n'importe quel terme de la suite.

**Exemple 4.** Le 23 janvier 1960, Jacques Piccard et Don Walsh descendent à bord du bathyscaphe (nom des sous-marins d'exploration abyssale) nommé *Trieste* à 10 916 mètres de profondeurs dans la fosse des Mariannes. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suites des positions $u_n$ du bathyscaphe à la minute $n$. On sait que lors de sa descente, la profondeur du bathyscaphe est donnée (en mètres) pour tout $n \in \mathbb{N}$, par



$$u_n = 60n.$$

1. A l'instant $n = 0$, où se trouve le bathyscaphe ? ..........................................

   ..........................................................................................

2. Après 30 minutes de plongée, à quelle profondeur se trouve le *Trieste* ?

   ..........................................................................................

3. Après deux heures de plongée, à quelle profondeur se trouve le *Trieste* ?

   ..........................................................................................

*NB : la vitesse donnée de* 60 *mètres par minute n'a été respectée lors de la plongée que jusqu'à* 8000 *mètres, profondeur à laquelle le bathyscaphe a commencé à ralentir sa descente.*

## V.3 Par récurrence

Chacun des termes de la suite est construit à partir du terme précédent.

**Application 5**. On reprend l'exemple 3.

1. Exprimer $u_1$ *en fonction* de $u_0$. ..........................................................

2. Exprimer $u_2$ *en fonction* de $u_1$. ..........................................................

3. En déduire une formule donnant $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. ..................................
4. Expliquer par une phrase comment à partir de la formule de la question précédente, nous pouvons calculer $u_{10}$.

   ..........................................................................................

   ..........................................................................................