M1 MEEF 2016-2017
Séquence 4

Feuille 3. Le calcul différentiel.

Exercice 1.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $f : E \to F$ et $y_0 \in F$ tels que $\forall x \in E,\ f(x) = y_0$ (f est une application constante). Montrer que f est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

2. Pour E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, montrer que toute application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

3. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 1$, définie par $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f(A) = A^3$. Montrer que f est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

4. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$, telle qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E^2$. Montrer que f est différentiable en $x = 0$ et calculer $d_0 f$.

Exercice 2.

1. Soit E un espace euclidien munit de sa norme euclidienne $\|.\|_2$. Montrer que $N : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E,\ N(x) = \|x\|_2^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\|.\|$ une norme quelconque de E. Montrer que $\|.\|$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 3. Justifier que les deux fonctions suivantes sont différentiables, calculer leurs gradients et en déduire leurs différentielles,

$$f(x,y,z) = 2 + 3z + xy + z\sin\left(x^2 + y^2\right), \qquad g(x,y) = 1 + x\sqrt{y^2+2}.$$

Exercice 4. Calculer la jacobienne des applications suivantes,

$$\begin{aligned}
&f_1(x,y,z) = (\sin(xyz),\ x + \mathrm{e}^z,\ y + z), && f_2(x,y,z) = (x\mathrm{ch}(y),\ \mathrm{e}^y\cos(z)),\\
&f_3(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy}(\cos(z) + \sin(y)), && f_4(x,y) = \left(x,\ y\mathrm{e}^x,\ xy^2\right),\\
&f_5(x) = \left(\mathrm{e}^x,\ x^3,\ \cos(x)\right), && f_6(x,y) = x^2 - 3xy + y^2\\
&f_7(x,y) = y^x, && f_8(x,y,z) = z\arctan(y/x),\ x \neq 0.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f\ \mathbb{R}^2 \to E$ une application différentiable. On définit

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & E, \\ x & \mapsto & f(x,-x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & f(y,x). \end{array}$$

Montrer que u et v sont différentiables et calculer leurs différentielles en fonction de la différentielle de f, puis de ses dérivées partielles et enfin du gradient de f lorsque $E = \mathbb{R}$.

Exercice 6.

1. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application et a un point de E. Pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, on définit la dérivée dans la direction u au point a par,
$$D_u f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}.$$
Montrer que lorsque f est différentiable en a cette limite existe et l'exprimer en fonction de $d_a f$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par, $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Justifier que f est différentiable sur son ensemble de définition et montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $D_u f(1,0) = u$.

Exercice 7. Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois espaces vectoriels normés de dimension finie. On rappelle que pour toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in E \times F$, $\|B(x,y)\|_G \leqslant c \|x\|_E \|y\|_F$.

1. Montrer que B est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle.

2. Soient $(H, \|.\|_H)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : H \to E$ et g $H \to F$ deux applications différentiables. Montrer que $b : H \to G$ définie par
$$\forall x \in H, \qquad b(x) = B\left(f(x), g(x)\right),$$
est différentiable et calculer sa différentielle en fonction de celle de f et de g.

Exercice 8. On considère,
$$\begin{array}{cccccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & & \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ & & & 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0). \end{array}$$

1. Montrer à l'aide de l'inégalité $2xy \leqslant x^2 + y^2$, que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent et les calculer.

3. Soit
$$\begin{array}{cccccc} \gamma : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & t & \mapsto & f(t,t^2) & \text{si} & t \neq 0, \\ & & & 0 & \text{si} & t = 0. \end{array}$$
Montrer que γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\gamma'(0)$.

4. En déduire à l'aide des deux précédentes questions que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par
$$\begin{array}{cccccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} & & \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ & & & 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0). \end{array}$$

Démontrer que f est continue en $(0,0)$, admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 10. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$. On effectue le changement de variable en coordonnées polaires en définissant

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \mapsto & f \circ u(r,\theta). \end{array}$$

où u est définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{array}$$

1. Justifier que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
2. Calculer, en inversant une certaine matrice, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.
3. Déterminer toutes les fonctions $\mathscr{C}^1$ vérifiant
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 11.

1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$
Indication : poser $\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(u+v, u-v)$ et $G = F \circ \varphi$.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit u un endomorphisme de E symétrique, id est, $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x),\, y\rangle = \langle x,\, u(y)\rangle$.

1. Montrer que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle u(x),\, x\rangle$, est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. Etablir que l'application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}$, est une application différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 13. Soient E un espace euclidien munit de sa norme euclidienne $\|.\|$, $a \in E$ et

$$f: \begin{array}{ccc} E \setminus \{a\} & \to & E \\ x & \mapsto & \frac{a-x}{\|x-a\|^2}. \end{array}$$

Montrer que f est différentiable sur $E \setminus \{a\}$, calculer sa différentielle et montrer que

$$d_x f(h) = \frac{S.h}{\|x-a\|^2}$$

où S est la symétrie orthogonale d'axe $x - a$.

Exercice 14. Déterminer les extremums locaux et globaux des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

$$f_1(x,y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y, \qquad f_2(x,y) = x^2 + y^4 - 2y^2,$$
$$f_3(x,y) = x^4 + x^2y - x^2 - y, \qquad f_4(x,y) = x^2 - 4xy + 8y^2 + 2x + 3,$$
$$f_5(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Indication : pour les minimums globaux de f_5 poser $u = x - y$ et $v = x + y$ et montrer que $f_5(x,y) \geqslant \frac{u^4 - 16u^2}{8}$.

Exercice 15. Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant 0,\ y \leqslant 0,\ x + y \geqslant -3\}$ par

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$