M1 MEEF 2016-2017
Séquence 4

Feuille 2. Les espaces vectoriels normés

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ des trois normes usuelles, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

1. Dessiner les boules unités associées à ces normes lorsque $n = 2$.
2. Vérifier les inégalités suivantes et montrer que ces inégalités sont optimales.

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leqslant n\,\|x\|_\infty.$$

Rappel : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2ab \leqslant a^2 + b^2$.

Exercice 2. Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ où $a < b$ sont deux réels. On munit E des trois normes usuelles, pour $f \in E$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

1. Montrer les inégalités suivantes :

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty.$$

2. Montrer que deux quelconques de ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 3. Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty,$$

sont deux normes équivalentes.

Exercice 4. Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Pour $f \in E$ on définit $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|'_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|$.

1. Montrer que $\|.\|'_\infty$ n'est pas une norme sur $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|'_\infty$ sont deux normes sur E.
3. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 5. Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_1 \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \|f\|_1 + \|f'\|_\infty,$$

sont deux normes mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6. Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\|f\| = \left(f^2(0) + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}, \qquad \forall f \in E,$$
définit une norme sur E.

2. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$.

3. Démontrer que la convergence au sens de $\|.\|$ implique la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 7. Soit $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ où $a < b$ sont deux réels. Soient $\alpha \in E$ tel que $\forall t \in [a, b]$, $\alpha(t) > 0$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (f, g) \in E^2, \qquad \varphi(f, g) = \int_a^b \alpha(t) f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. En déduire que $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$, $\forall f \in E$, est une norme.

2. Montrer que N est équivalente à $\|.\|_2$ où l'on rappelle que $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t) \, \mathrm{d}t}$.

3. On ne suppose plus dans cette question que $\forall t \in [a, b]$, $\alpha(t) > 0$ mais on fixe α par $\forall t \in [a, b]$, $\alpha(t) = \frac{t-a}{b-a}$. Montrer que φ est toujours définie positive mais que N et $\|.\|_2$ ne sont plus équivalentes.

Exercice 8. On considère E l'ensemble des fonctions f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ admettant un développement en série trigonométrique, $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) \mathrm{e}^{i2\pi nx}$, avec $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et pour $(f, g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ préciser $c_n(f+g)$ et $c_n(\lambda f)$.

2. Montrer que $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ est une norme sur E.

Exercice 9. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ deux éléments de $\mathbb{C}^{n+1}$. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, un polynôme de degré au plus n, on pose
$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(b_k)| \, .$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Justifier que ces normes sont équivalentes.

3. Déterminer une constante c telle que pour tout $P_i n\mathbb{C}_n[X]$,
$$N_1(P) \leqslant c N_2(P),$$
en fonctions des a_k et b_k.
Indication : puisque P passe par $P(a_k)$ aux points a_k il est égal au polynôme interpolateur de Lagrange associé.

Exercice 10. Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $r > 0$, $a \in E$. On note
$$B(a, r[= \{x \in E, \ \|x - a\| < r\} \qquad B(a, r] = \{x \in E, \ \|x - a\| \leqslant r\} \, .$$
Montrer que l'adhérence de $B(a, r[$ est $\overline{B(a, r[} = B(a, r]$ et que l'intérieur de $B(a, r]$ est $\overset{\circ}{B(a, r]} = B(a, r[$.

Exercice 11. Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, on note $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r.

1. Pour tout $a \in E$ et tout $r > 0$, montrer qu'il existe un homéomorphisme (bijection continue de réciproque continue) de $B(a, r)$ dans $B(0, 1)$.

2. On considère

$$\varphi : \quad \begin{aligned} B(0,1) &\to E \\ x &\longmapsto \frac{x}{1 - \|x\|}. \end{aligned}$$

   Montrer que φ est bijective, expliciter sa réciproque et justifier que φ est un homéomorphisme.

Exercice 12. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, X un compact de E et Y un fermé de E. Montrer que l'ensemble $X + Y = \{x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$ est fermé.

Exercice 13. Montrer que tout compact d'un espace vectoriel normé est fermé et borné.