M1 MEEF 2016-2017
Séquence 4

Feuille 1. Les équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' + 2y = 4x^2$ avec $y(0) = 3$.
2. $y' + y = 2\mathrm{e}^x$ avec $y(0) = 0$.
3. $y' - 3y = 2\mathrm{e}^{3x}$ avec $y(1) = 4\mathrm{e}^3$.
4. $y' - y = x + \mathrm{e}^x$ avec $y(0) = -1$.
5. $3y' - 2y = 3\cos(2x)$ avec $y(0) = \frac{17}{20}$.
6. $y' + y = 2x\mathrm{e}^{-x}$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 2. Soit $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Etablir que les solutions de $y'(t) - a(t)y(t) = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\mathrm{sh}(x)y'(x) - \mathrm{ch}(x)y(x) = 1.$$

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' - 8y' + 15y = 15x^2 - 16x + 17$ avec $y(0) = 3$, $y'(1) = 2(1 + 3\mathrm{e}^3)$.
2. $y'' - \sqrt{2}y' + y = x + 1$ avec $y(0) = 1 + \sqrt{2}$, $y'(0) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. $y'' + y' - 6y = 4\mathrm{e}^x$ avec $y(0) = -1$, $y'(0) = -21$.
4. $y'' - 4y' + 4y = -6\mathrm{e}^{2x}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
5. $y'' - 4y = x + \mathrm{e}^{2x}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
6. $y'' - 3y' + 2y = 10\sin(x)$ avec $y(0) = 6$, $y''(0) = 0$.
7. $y'' - 2y' + 2y = 5\cos(x)$ avec $y(0) = 2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\left(\mathrm{e}^{\pi/2} + 1\right)$.
8. $y'' - 4y' + 4y = x\mathrm{e}^{2x}$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Exercice 5. Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants où x, y et z sont des fonctions de la variable t.

1. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) & \text{avec} \quad x(0) = 5 \\ y'(t) = x(t) - y(t) & \qquad\quad y(0) = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 4z(t) & \qquad\quad x(0) = 6 \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - z(t) & \text{avec} \quad y(0) = 0 \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - z(t) & \qquad\quad z(0) = 4 \end{cases}$

Exercice 6. Justifier l'existence d'une solution et résoudre le système d'équations différentielles suivant,

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) + t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) + 2t, \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. Discuter l'ensemble des solutions de l'équation suivante et déterminer les solutions développables en série entière :

$$2xy''(x) + y'(x) - y(x) = 0.$$

Exercice 8. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 2xy = (1-2x)\mathrm{e}^x$ avec $y(0) = 5$.
2. $y' - 2xy = \mathrm{e}^{x^2}\sin(x)$ avec $y(0) = 1$.
3. $y' - \cos(x)y = \cos(x)$ avec $y(0) = 0$.
4. $y' - \cos(x)y = \sin(2x)$ avec $y(0) = -1$.
5. $\sin(x)y' - \cos(x)y = 3x^2\sin^2(x)$ avec $y'(0) = 2$.
6. $(1-x^2)y' - 2xy = x^2$ avec $x \in]-1,1[$.
7. $(1+x^2)y' + xy - 2x = 0$ avec $y(1) = 3$.
8. $x(x-1)y' - (2x-1)y + x^2 = 0$ avec $x > 0$.

Exercice 9. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, $b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation

$$(E) \qquad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par le wronskien de (y_1, y_2).

Exercice 10.

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que toute solution y de l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = h(t)$ converge vers 0 en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $f'(t) + f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Montrer que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x(x+1)y''(x) + (x+2)y'(x) - y(x) = 0.$$

Exercice 12. Résoudre l'équation différentielle $y(x) - xy'(x) = \frac{y^3}{4}$ avec pour condition $y(5) = \frac{5}{2}$.
Indication : reconnaître une équation de Bernoulli et poser en conséquence $z = \frac{1}{y^2}$.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle d'inconnue y une fonction dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$:
$$(E) \qquad (1-x^2)y' - xy = 1.$$

1. Quels sont les intervalles I pour lesquels le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution ?

2. Sur chacun de ces intervalles résoudre (E).

Exercice 14. On considère l'équation différentielle d'inconnue y une fonction dérivable d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$:
$$(E) \qquad 2x(1-x)y' - (1-x)y = 1.$$

1. Quels sont les intervalles I pour lesquels le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution ?

2. Sur chacun de ces intervalles résoudre (E).

3. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $]-\infty, 1[$.

4. Existe-t-il une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?