Licence Mathématiques, Informatique et Statistique 3ème année

Mathématiques 1610

Corrigé du devoir maison

Solution de l'exercice 1 :

1) Soit f une fonction homogène de degré $r \in \mathbb{R}$. Puisque f est $\mathcal{C}^1$ ses dérivées partielles existent. Notons $\partial_1 f$ respectivement $\partial_2 f$ sa dérivée partielle par rapport à sa première coordonnée, respectivement par rapport à sa seconde coordonnée. Montrons que $\partial_1 f$ est homogène de degré $r-1$. Puisque f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, on rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ il existe ε une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(h,k) \to 0$ quand $(h,k) \to (0,0)$ et telle que pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\partial_1 f(a,b) + k\partial_2 f(a,b) + \|(h,k)\|\, \varepsilon(h,k), \tag{1}$$

où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$. Fixons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$. La propriété (1) implique en particulier, que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$f(t(x+h), ty) = f(tx + th, ty) = f(tx, ty) + th\partial_1 f(tx, ty) + \|t(h,0)\|\, \varepsilon_1(th, 0),$$

avec $\varepsilon_1(u,v) \to 0$, lorsque $(u,v) \to (0,0)$. Notez que la définition de ε_1 dépend de (x,y) et de t mais pas de h. En utilisant le fait que f est homogène de degré r, on obtient que

$$\begin{aligned}
&\forall h \in \mathbb{R}, \qquad t^r f(x+h, y) = t^r f(x,y) + th\partial_1 f(tx, ty) + \|t(h,0)\|\, \varepsilon_0(th, 0)\\
\Leftrightarrow\quad &\forall h \in \mathbb{R}, \qquad t^r\left(f(x+h,y) - f(x,y)\right) = th\partial_1 f(tx, ty) + \|t(h,0)\|\, \varepsilon_0(th, 0).
\end{aligned}$$

Or (1) nous dit également que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad f(x+h, y) - f(x,y) = h\partial_1 f(x,y) + \|(h,0)\|\, \varepsilon_2(h,0),$$

avec $\varepsilon_2(u,v) \to 0$, lorsque $(u,v) \to (0,0)$. D'où,

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad ht^r\partial_1 f(x,y) + t^r \|(h,0)\|\, \varepsilon_2(h,0) = th\partial_1 f(tx,ty) + \|t(h,0)\|\, \varepsilon_0(th,0).$$

Donc en divisant par $h \neq 0$,

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \qquad t^r\partial_1 f(x,y) + t^r\frac{|h|}{h}\|(1,0)\|\, \varepsilon_2(h,0) = t\partial_1 f(tx,ty) + \frac{|h|}{h}\|t(1,0)\|\, \varepsilon_0(th,0).$$

En passant à la limite lorsque $h \to 0$, on obtient que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$,

$$t^r\partial_1 f(x,y) = t\partial_1 f(tx,ty)$$

et ainsi

$$\partial_1 f(tx,ty) = t^{r-1}\partial_1 f(x,y)$$

c'est-à-dire que $\partial_1 f$ est homogène de degré $r-1$. Exactement de la même façon, on montre que $\partial_2 f$ est homogène de degré $r-1$.

2) Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Supposons que f soit homogène de degré $r \in \mathbb{R}$. Pour établir la formule souhaitée, nous allons dériver par rapport à t l'égalité d'homogénéité $f(tx, ty) = t^r f(x, y)$. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$ (en fait il suffit de prendre $t = 1$ dans cette question). Par (1), il existe une fonction ε_1 tendant vers 0 en $(0, 0)$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f((t+h)x, (t+h)y) &= f(tx + hx, ty + hy) \\ &= f(tx, ty) + hx\partial_1 f(tx, ty) + hy\partial_2 f(tx, ty) + \|h(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy). \end{aligned}$$

Puisque f est homogène de degré r, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$(t+h)^r f(x, y) = t^r f(x, y) + hx\partial_1 f(tx, ty) + hy\partial_2 f(tx, ty) + \|h(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy).$$

Naturellement la fonction $s \mapsto s^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $s \mapsto rs^{r-1}$. Donc il existe une fonction ε_2 tendant vers 0 en 0 telle que pour tout h, $(t+h)^r = t^r + rt^{r-1}h + h\varepsilon_2(h)$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\forall h \in \mathbb{R}, \quad \left(rt^{r-1}h + h\varepsilon_2(h)\right) f(x, y) = hx\partial_1 f(tx, ty) + hy\partial_2 f(tx, ty) + \|h(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy) \\ \Leftrightarrow \quad &\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \left(rt^{r-1} + \varepsilon_2(h)\right) f(x, y) = x\partial_1 f(tx, ty) + y\partial_2 f(tx, ty) + \frac{|h|}{h}\, \|(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy). \end{aligned}$$

Par conséquent, quand $h \to 0$,

$$rt^{r-1} f(x, y) = x\partial_1 f(tx, ty) + y\partial_2 f(tx, ty).$$

En particulier lorsque $t = 1$, on conclut que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$rf(x, y) = x\partial_1 f(x, y) + y\partial_2 f(x, y).$$

Montrons maintenant la réciproque. Soient f une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$rf(x, y) = x\partial_1 f(x, y) + y\partial_2 f(x, y). \tag{2}$$

On veut montrer que f est homogène de degré r. Fixons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et posons

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(t) := f(tx, ty) - t^r f(x, y). \tag{3}$$

L'objectif est de montrer que g est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui est bien sûr équivalent au fait que f est homogène de degré r. Puisque l'information en notre possession (2) concerne les dérivées partielles de f il est assez naturel de dériver g. Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme précédemment, on écrit que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(t+h) &= f(tx, ty) + hx\partial_1 f(tx, ty) + hy\partial_2 f(tx, ty) + \|h(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy) \\ &\qquad - t^r f(x, y) - rt^{r-1}hf(x, y) - h\varepsilon_2(h)f(x, y) \\ &= g(t) + \frac{h}{t}\left(tx\partial_1 f(tx, ty) + ty\partial_2 f(tx, ty) - rt^r f(x, y)\right) \\ &\qquad + \|h(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy) - h\varepsilon_2(h)f(x, y). \end{aligned}$$

En utilisant (2) au point (tx, ty), on trouve que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(t+h) &= g(t) + \frac{h}{t}\left(rf(tx, ty) - rt^r f(x, y)\right) + \|h(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy) - h\varepsilon_2(h)f(x, y) \\ &= g(t) + \frac{h}{t} rg(t) + \|h(x, y)\|\, \varepsilon_1(hx, hy) - h\varepsilon_2(h)f(x, y). \end{aligned}$$

Il est clair que la fonction $h \mapsto \frac{h}{t} r g(t)$ est linéaire (et continue puisque la dimension est finie). Donc la fonction g est différentiable/dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(t) = \frac{r}{t} g(t).$$

On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I alors g est une solution de l'équation $g' = ag$ sur I si et seulement s'il existe C une constante telle que pour tout $t \in I$, $g(t) = C\,\mathrm{e}^{A(t)}$ où A est une primitive de a. Ici la fonction $t \mapsto r/t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont une primitive est donnée par $t \mapsto r\ln(t)$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g(t) = C\,\mathrm{e}^{r\ln(t)} = Ct^r.$$

Or par définition de g (cf (3)),

$$C = g(1) = 0.$$

On conclut que g est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui implique que f est homogène de degré r.

3) Il est possible de résoudre cette question de la même façon que la question 1, en poussant le développement de Taylor à l'ordre 2,

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) + \|(h,k)\|^2\,\varepsilon(h,k). \end{aligned}$$

Mais soyons plus astucieux. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ homogène de degré r. Par la question 1, la fonction $f_1 : (x,y) \mapsto \partial_1 f(x,y)$ est homogène de degré $r-1$ et de classe $\mathcal{C}^1$ (car f est $\mathcal{C}^2$). Donc d'après la question 2, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on a

$$x\partial_1 f_1(x,y) + y\partial_2 f_1(x,y) = (r-1) f_1(x,y),$$

c'est-à-dire

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (r-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y). \tag{4}$$

De même on a

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (r-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \tag{5}$$

En multipliant (4) par x et (5) par y et en sommant les deux égalités obtenues, on trouve que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (r-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

Puisque f est homogène de degré r, on utilise à nouveau la question 2 pour conclure que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (r-1)rf(x,y).$$

Solution de l'exercice 2 :

1) Pour tout $t \in [0,1]$, on a $t^2 \leqslant t$. Donc pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \leqslant \left(\frac{1+t}{2}\right)^n.$$

En intégrant cette inégalité, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant a_n \leqslant \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{2^n(n+1)}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2^{n+1}}{2^n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$$

et par encadrement, il est clair que $a_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Soit $(\delta_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans $]0,1[$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [1-\delta_n, 1]$,

$$\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \geqslant \left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n.$$

En intégrant, cette inégalité entre $[1-\delta_n, 1]$,

$$\int_{1-\delta_n}^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t \geqslant \left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n \int_{1-\delta_n}^1 1\,\mathrm{d}t = \delta_n \left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n = \left(1-\delta_n+\frac{\delta_n^2}{2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\delta_n+\frac{\delta_n^2}{2}\right)\right).$$

Posons $u := -\delta_n + \frac{\delta_n^2}{2}$. On rappelle que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$. Ici puisque $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$, on a bien $\lim_{n\to+\infty} u = 0$. De plus $u \underset{n\to+\infty}{\sim} -\delta_n$. Par conséquent $o(u) \underset{n\to+\infty}{=} o(\delta_n)$. On en déduit que

$$\ln\left(1-\delta_n+\frac{\delta_n^2}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\delta_n + \frac{\delta_n^2}{2} + o(\delta_n) \underset{n\to+\infty}{=} -\delta_n + o(\delta_n).$$

Conclusion :

$$\left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-n\delta_n + o(n\delta_n)\right).$$

3) Posons pour tout $n \geqslant 2$, $\delta_n = 1/n$ (éventuellement $\delta_0 = \delta_1 = 1/2$ si l'on souhaite définir δ_n sur $\mathbb{N}$). Cette suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien dans $]0,1[$ et tend bien vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1-\delta_n]$, $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \geqslant \int_{1-\delta_n}^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \geqslant \delta_n \left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n \geqslant 0. \tag{6}$$

Or toujours par la question précédente,

$$\left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-1+o(1)\right)$$

Donc par continuité de la fonction exponentielle, $\left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1}$ quand $n \to +\infty$. Donc

$$\delta_n \left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}.$$

Or la suite $(\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de signe constant et la série associée est divergente donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \delta_n \left(\frac{1+(1-\delta_n)^2}{2}\right)^n$ diverge également. Ainsi par (6) et le théorème de comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge.

4) Par la question précédente, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge. Par conséquent $\rho \leqslant 1$. Mais par la question 1, on a aussi vu que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant 2/(n+1)$. Donc ρ est plus grand que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n+1} z^n$. Or

$$\frac{2}{n+2}\frac{n+1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc par le théorème de d'Alembert pour les séries entières, on en déduit que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{n+1} z^n$ est égal à 1 et par ce que nous avons dit précédemment, $\rho \geqslant 1$. Finalement on conclut que $\rho = 1$.

5) La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est positive (cf question 1) donc $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. De plus pour tout $n \geqslant 0$, comme $\frac{1+t^2}{2} \leqslant 1$, on a

$$\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n. \tag{7}$$

En intégrant cette inégalité, on vérifie bien que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et par la question 1, elle converge vers 0. Ainsi par le critère de Leibniz, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ converge.

6) Soit $t \in [0,1[$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ est une série géométrique de raison $(-1)\frac{1+t^2}{2}$ dont la valeur absolue est strictement plus petite que 1 puisque $t < 1$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ converge et de plus pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,1[$,

$$R_p(t) = \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(t) = (-1)^{p+1}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = (-1)^{p+1}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{p+1} \frac{1}{1+\frac{1+t^2}{2}}.$$

Or $\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} |R_p(t)| = 1/2$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_p > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\alpha_p, 1[$, $|R_p(t)| \geqslant 1/2 - \varepsilon$. En particulier pour $\varepsilon = 1/4$ on en déduit que l'on peut au moins trouver un réel $t \in [0,1[$ tel que $|R_p(t)| \geqslant 1/4$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t\in[0,1[} |R_p(t)| \geqslant \frac{1}{4}.$$

Notamment la suite $\left(\|R_p\|_{[0,1[}^{\infty}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ ne converge par vers 0, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.

7) Fixons $a \in]0,1[$ et montrons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[0,a]$. Par ce qui précède, on sait que pour tout $t \in [0,a]$ et $p \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre p de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ est donné par

$$R_p(t) = (-1)^{p+1}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{p+1}\frac{1}{1+\frac{1+t^2}{2}}.$$

Par croissance de la fonction $t \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0,a]$, d'une part $\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{p+1} \leqslant \left(\frac{1+a^2}{2}\right)^{p+1}$ et d'autre part $\frac{1}{1+\frac{1+t^2}{2}} \leqslant \frac{2}{3}$. Par conséquent,

$$\|R_p\|_{[0,a]}^{\infty} \leqslant \left(\frac{1+a^2}{2}\right)^{p+1}\frac{2}{3} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $\frac{1+a^2}{2} < 1$. Ceci signifie que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[0,a]$. Donc par le théorème d'interversion du signe somme et de l'intégrale (les f_n sont toutes Riemann-intégrables sur $[0,a]$ car continues), on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est Riemann-intégrable sur $[0,a]$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^a f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{1+\frac{1+t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

car on rappelle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ est une série géométrique. Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^a f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_0^a \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right). \tag{8}$$

8) On sait par la question 5 que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ converge. De plus pour tout $a \in]0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^a f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Or nous avons vu dans la question précédente que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_0^a f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Donc il en va de même pour $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi, par (8), pour tout $a \in [0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Fixons $a \in [0,1[$ et posons pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p^{(a)} = \sum_{n=0}^{p}\int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t, \qquad S^{(a)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t, \qquad R_p^{(a)} = S^{(a)} - S_p^{(a)}.$$

La suite $\left(\int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0} = \left((-1)^n\int_a^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ est alternée et en intégrant (7) entre $[a,1]$, on en déduit que la suite $\left(\int_a^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. Notez au passage que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_a^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\mathrm{d}t \leqslant a_n,$$

que donc par la question 1, la suite $\left(\int_a^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 et que l'on pouvait aussi invoquer le critère de Leibniz pour montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_a^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Cette remarque n'est pas anodine puisque la démonstration de ce dernier résultat repose sur le fait que les deux suites $(S_{2p}^{(a)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1}^{(a)})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. N'hésitez pas à consulter à nouveau cette démonstration. Nous allons ici remontrer que $(S_{2p}^{(a)})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2p+1}^{(a)})_{p\in\mathbb{N}}$ croissante. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2p+2}^{(a)} = S_{2p}^{(a)} + \int_a^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{2p+2} \mathrm{d}t - \int_a^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{2p} \mathrm{d}t$$

Or la suite $\left(\int_a^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante donc $S_{2p+2}^{(a)} \leqslant S_{2p}^{(a)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc $(S_{2p}^{(a)})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or, puisque $(S_{2p}^{(a)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(S_p^{(a)})_{p\in\mathbb{N}}$, elle converge également vers $S^{(a)}$. On en déduit donc que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S^{(a)} \leqslant S_{2p}^{(a)}.$$

De la même façon, on peut montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S^{(a)} \geqslant S_{2p+1}^{(a)}.$$

En particulier pour $p = 0$,

$$S_1^{(a)} \leqslant S^{(a)} \leqslant S_0^{(a)}.$$

Or d'une part,

$$S_1^{(a)} = -\int_a^1 \frac{1+t^2}{2} \mathrm{d}t \geqslant -\int_a^1 1 \,\mathrm{d}t = -(1-a),$$

Et d'autre part,

$$S_0^{(a)} = \int_a^1 1 \,\mathrm{d}t = 1 - a.$$

D'où,

$$-(1-a) \leqslant S^{(a)} \leqslant 1 - a.$$

En particulier lorsque $a \to 1$, on a $S^{(a)} \to 0$. Donc en passant à la limite lorsque $a \to 1$ dans (9), (par continuite de l'arc-tangente),

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$