

Feuille 8. Les fonctions de deux variables.

Exercice 1. Etudier la continuité des fonctions suivantes de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

$$1. \quad f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f_1(0, 0) = 0.$$

$$2. \quad f_2(x, y) = \frac{x^2}{y} \text{ si } y \neq 0, \quad f_2(x, 0) = 0.$$

$$3. \quad f_3(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f_3(0, 0) = 0.$$

Exercice 2. Pour chacune des applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes,

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy,$$

$$f_4(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - (x + y)^4,$$

$$f_2(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 y^2,$$

$$f_5(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2).$$

$$f_3(x, y) = x^2 + y^2 + 6 - 2xy,$$

1. Calculer le gradient de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Calculer la matrice hessienne de f .
4. Pour chacun des points critiques de f , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice hessienne.
5. Pour chacun des points critiques de f , dire s'il s'agit ou non d'un extremum global de f .

Exercice 3. Etant donnés le domaine D de \mathbb{R}^2 et la fonction f , dessiner D et calculer l'intégrale double de f sur D dans les cas suivants.

$$1. \quad D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y, 0 < y < 1\}, \quad f_1(x, y) = x^2 + y.$$

$$2. \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad f_2(x, y) = x \sin(xy).$$

$$3. \quad D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < x\}, \quad f_3(x, y) = x^2 \sin(xy).$$

$$4. \quad D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}, \quad f_4(x, y) = x(1 - 2x) \sin(xy).$$

$$5. \quad D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, \text{ où } a, b > 0, \quad f_5(x, y) = x^3 + y^3.$$

$$6. \quad D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, \quad f_6(x, y) = \ln(1 + x + y).$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^3 - x(1 + y^2).$$

1. Déterminer les extrema locaux de f .
2. Soit D le domaine de \mathbb{R}^2 défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Représenter D .
3. On admet le résultat suivant : *toute fonction continue sur D est bornée et atteint ses bornes en au moins un point*. On note M la valeur du maximum de f et m la valeur du minimum de f . Montrer que si f atteint un extremum en $(x, y) \in D$, c'est-à-dire si le couple (x, y) vérifie $f(x, y) = M$ ou $f(x, y) = m$, alors nécessairement $x^2 + y^2 = 1$.

4. On pose $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$. Donner le tableau de variation de g .
5. En déduire les valeurs de M et de m ainsi que les points $(x, y) \in D$ pour lesquels ces valeurs sont atteintes.

Exercice 5. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par,

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - xy.$$

1. Donner aux points $(1, 1, f(1, 1)), (1, 2, f(1, 2)), (2, 1, f(2, 1))$ l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
2. Donner l'équation de la tangente à la ligne de niveau passant par $(1, 1)$, si elle existe.