L2 MTH1314 2016-2017

Feuille 5. Les fractions rationnelles

Exercice 1. Mettre sous forme réduite les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{X^3+4X^2+X-6}{X^4-X^3-5X^2-X-6}, \qquad F_2 = \frac{X^4+X^2+1}{X^3+3X^2+3X+2},$$
$$F_3 = \frac{X^5+5X^3+2X+1}{X^3-1}, \qquad F_4 = \frac{X^6-X^5-6X^3+5X^2-2X+3}{X^4-2X^3+2X^2-2X+1}.$$

Exercice 2. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg(FG) = \deg(F)+\deg(G)$, et que $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg(F), \deg(G))$, avec égalité si $\deg(F) \neq \deg(G)$.

Exercice 3. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1 = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \qquad F_2 = \frac{1}{X(X-1)^2} \qquad F_3 = \frac{1}{X^2+X+1}$$
$$F_4 = \frac{4}{(X^2+1)^2} \qquad F_5 = \frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} \qquad F_6 = \frac{1}{X^4+X^2+1}$$

Exercice 4. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes :

$$F_1 = \frac{4}{(X^2-1)^2}, \qquad F_2 = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}, \qquad F_3 = \frac{X^5+1}{X(X-1)^2},$$
$$F_4 = \frac{1}{X^5-1}, \qquad F_5 = \frac{X^2}{(X^2+X+1)^2}, \qquad F_6 = \frac{X}{\left(X^2-1\right)^2(X^2+1)}.$$

Indication : pour F_4 utiliser une formule du cours faisant intervenir une dérivée.

Exercice 5. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

$$F_1 = \frac{X^5+1}{X^3-1}, \qquad F_2 = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}, \qquad F_3 = \frac{X^3+1}{(X-1)(X^2+1)^3},$$
$$F_4 = \frac{X^4+3X^2+1}{X^5+X}, \qquad F_5 = \frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3}, \qquad F_6 = \frac{1}{X^{2n}-1}, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Indications : pour F_3 diviser X^3+1 par X^2+1, pour F_4 diviser X^4+3X^2+1 par X^4+1, pour F_5 diviser le numérateur par X^2+X+1, pour F_6 utiliser une formule du cours.

Exercice 6.

1. Soient a et b deux complexes. Calculer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de $F = \frac{1}{(X-a)(X-b)}$. On distinguera les cas $a = b$ des cas $a \neq b$.
2. En déduire les dérivées d'ordre n de la fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$.
3. Calculer les dérivées d'ordre n de la fonction $f(x) = \arctan x$.

Exercice 7. On considère la fraction $F = \frac{X+3}{(X-1)^4(X+1)}$.

1. Donner l'expression de G définie par $G(T) = F(T+1)$.

2. Montrer que l'on peut décomposer le numérateur $D(T)$ de la fraction $G(T)$ de la façon suivante
$$D(T) = a(2+T) + TD_1(T)$$
où a est un réel et $D_1(T)$ un polynôme dans $\mathbb{R}[T]$. En déduire alors que
$$G(T) = \frac{2}{T^4} - \frac{2}{T^3(T+2)}.$$

3. Réitérer le processus pour obtenir la décomposition en éléments simples de $G(T)$ et en déduire celle de $F(X)$.

Exercice 8. On considère la fraction : $F(X) = \frac{1}{(X^3-1)^3}$.

1. Montrer que la fraction s'écrit :
$$F(X) = \frac{1}{(X-1)^3(X^2+X+1)^3} = \sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{(X-1)^k} + F_1(X),$$
où la fraction F_1 ne possède pas 1 pour pôle.

2. Multiplier cette égalité par $(X-1)^3$, dériver une fois, deux fois et en déduire la valeur des a_k.

3. Remarquer que $F(jX) = F(j^2X) = F(X)$ et terminer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 9. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle
$$\frac{1}{X^3-1}.$$
En déduire la décomposition en éléments simples de
$$\frac{X+2}{(X-1)(X^2+X+1)},$$
puis celle de
$$\frac{1}{(X^3-1)^2}.$$

Exercice 10. Ecrire le développement de Taylor au point 2 de X^5+1 et en déduire la décomposition en éléments simples de
$$F = \frac{X^5+1}{(X-2)^4}.$$

Exercice 11.

1. A l'aide d'une formule du cours, décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante
$$F = \frac{4X^3}{X^4-1}.$$

2. En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de
$$G = \frac{-4X^2(X^4+3)}{X^4-1)^2}.$$

Indication : dériver F.