L2 MTH1314 2016-2017

Feuille 3. Morphismes, anneaux et corps

Morphismes

Exercice 1. Soient $(G, *)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes.

1. Montrer que l'application $\pi : G \times H \to G$ définie par $\forall (g, h) \in G \times H$, $\pi(g, h) = g$ est un morphisme de groupes et déterminer alors le noyau et l'image de ce morphisme.

2. Déterminer les éléments $h \in H$ qui font de l'application $i_h : G \to G \times H$ définie par $\forall g \in G$, $i_h(g) = (g, h)$, un morphisme de groupes. Déterminer alors le noyau et l'image de ce morphisme.

Exercice 2. Soit G un groupe.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'inversion $J : G \to G$ définie par $\forall g \in G$, $J(g) = g^{-1}$, soit un morphisme de groupes.

2. Même question pour le carré $q : G \to G$ défini par $\forall g \in G$, $q(g) = g^2$.

Exercice 3. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, +) & \to & (2\mathbb{Z}, +) \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*, \times) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$ est un morphisme de groupe. Quel est son noyau ? son image ?

Exercice 5.

1. Soient G et H deux ensembles. Soient $*$ une l.c.i. de G et $\cdot$ une l.c.i. de H. On considère $\varphi : (G, *) \to (H, \cdot)$ un morphisme bijectif et on suppose que $(H, \cdot)$ est un groupe commutatif. Montrer alors que $(G, *)$ est un groupe commutatif (isomorphe à $(H, \cdot)$).

2. Vérifier que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{sh}(a + b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(b)\mathrm{ch}(a)$.

3. Montrer que $(\mathbb{R}, \otimes)$ est un groupe où la loi $\otimes$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \otimes y = x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2}.$$

Exercice 6. Soit G un groupe noté multiplicativement et a un élément de G. On désigne par f_a l'application de G dans G définie par $f_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que f_a est un automorphisme de G, c'est-à-dire un isomorphisme de G dans lui-même. On l'appelle « automorphisme intérieur ». On désigne par Aut G l'ensemble des automorphismes de G et par Int G l'ensemble des automorphismes intérieurs de G.

2. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} G & \to & \mathrm{Aut}\ G \\ a & \mapsto & f_a \end{array}$ est un morphisme de groupes dont on déterminera le noyau.

3. Le couple $(\mathrm{Int}\ G, \circ)$ est-il un groupe ?

Exercice 7. Le but de l'exercice est de montrer que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes. Soit $\varphi : (\mathbb{R}^*, \times) \to (\mathbb{C}^*, \times)$ un isomorphisme. Notons $\alpha = \varphi^{-1}(i)$, l'antécédent de i par φ.

1. Montrer que $\varphi(\alpha^2) = -1$.
2. Conclure.

Anneaux

Exercice 8. L'ensemble $2\mathbb{Z}$ muni des lois $+$ et $\times$ est-il un anneau ?

Exercice 9. On définit A comme étant l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues. On note par $+$ l'addition de deux fonctions, $\times$ le produit et $\circ$ la composition.

1. Quelle condition faut-il supposer sur f pour que $f \circ (\mathrm{Id} - \mathrm{Id}) = f \circ \mathrm{Id} + f \circ (-\mathrm{Id})$, où $\mathrm{Id} : x \mapsto x$ est la fonction identité sur $\mathbb{R}$. En déduire que $(A, +, \circ)$ n'est pas un anneau.
2. Vérifier que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif. On note 0_A et 1_A les éléments neutres pour $+$ et $\times$ respectivement.
3. Montrer qu'il existe f et g deux éléments distincts de 0_A tels que $f \times g = 0_A$.
4. Déterminer $A^\times$, les éléments inversibles de A.
5. Résoudre dans A l'équation $f^2 = 1_A$ et l'équation $f^2 = f$.

Exercice 10. On considère l'ensemble $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$, où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, il existe un unique couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = m + n\sqrt{2}$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
3. Montrer que l'application $\phi : \begin{array}{c} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \\ m + n\sqrt{2} \mapsto m - n\sqrt{2}. \end{array}$ est un automorphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ (c'est une bijection, et un morphisme pour chacune des deux lois).
4. Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(x) = x\phi(x)$. Montrer que N est une application de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}$, qui est un morphisme pour la multiplication.
5. En déduire que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
6. Vérifier que $3 + 2\sqrt{2}$ et $-3 + 2\sqrt{2}$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Corps

Exercice 11. On considère $(\mathbb{R}^2, +, *)$ où $+$ et $*$ sont deux lois définies respectivement par

$$\forall (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$
$$\forall (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, *)$ est un corps et le reconnaître.

Exercice 12. Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps de cardinal fini. On pose $K_1 = \{x \in \mathbb{K}^*,\ x^{-1} = x\}$ et $K_2 = \{x \in \mathbb{K}^*,\ x^{-1} \neq x\}$.

1. Déterminer tous les éléments de K_1.
2. En déduire

$$P = \prod_{x \in \mathbb{K}^*} x.$$