L2 MTH1314 2016-2017

Feuille 1. Logique et raisonnement

Exercice 1. On considère la phrase : « les mathématiciens sont tous des farceurs ». Indiquer laquelle des cinq phrases suivantes en est la négation :

1. « les mathématiciens ne sont jamais des farceurs ».
2. « les mathématiciens sont parfois des farceurs ».
3. « il y a des mathématiciens qui ne sont pas des farceurs ».
4. « les farceurs sont tous des mathématiciens ».
5. « il y a des farceurs qui ne sont pas des mathématiciens ».

Formaliser avec des quantificateurs chacune de ces assertions et écrire sa négation.

Exercice 2. Nier les propositions suivantes.

1. Tous les Hommes sont mortels.
2. Je mange beaucoup et je ne grossis pas.
3. Dans tous les troupeaux, il y a un mouton qui n'est pas blanc.
4. S'il pleut, nous jouerons au domino ou nous irons au cinéma.
5. Tous les jours de cet été, il a plu et il y a eu du brouillard.
6. Si je ne me trompe pas, je suis beau et intelligent.
7. Un artiste qui travaille dur et qui est doué deviendra célèbre.
8. Il existe un pays dont chaque ville possède un quartier mal famé.
9. Toutes les Suédoises sont blondes aux yeux bleus.
10. Tout homme, quand il est amoureux, devient stupide.
11. Dans tout livre, une page au moins compte plusieurs coquilles.

Exercice 3. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des étudiants de l'UBS, $\mathscr{J}$ l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Ecrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant de l'UBS se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée	2. f est bornée
3. f n'est pas la fonction nulle	4. f est paire
5. f ne s'annule pas	6. f est périodique
7. f est croissante	8. f n'est pas croissante
9. f est strictement croissante	10. f est inférieure à g
11. f n'est pas inférieure à g	12. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$

Exercice 5. Ecrire les propositions suivantes (non nécessairement vraies), ou une reformulation équivalente, uniquement avec des symboles mathématiques (aucun mot de français ne doit apparaître).

1. Tout entier relatif est la différence de deux entiers naturels.
2. Le module d'un nombre complexe est un nombre réel.
3. Il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré vaut deux.
4. Les seuls entiers naturels pairs sont deux, huit et quarante-quatre.

Exercice 6. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner à chaque fois la négation.

1. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant -y^2$.
2. $\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant -y^2$.
3. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x \leqslant -y^2$.
4. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{N},\ x \leqslant -y^2$.

Exercice 7. Parmi les énoncés suivants, lesquels peuvent être complétés par $\forall$? $\exists$?

1. $....x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $....x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $....x \in \mathbb{N},\ x \leqslant \pi$
4. $....x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 = 0$

Exercice 8. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ x + y \in [0,1]$.
2. $\forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ x + y \in [0,1]$.
3. $\exists x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ x + y \in [0,1]$.

Exercice 9. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il suffit qu'il soit strictement supérieur à 4.
2. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 3, il faut qu'il soit différent de 2.
3. Une condition suffisante pour qu'un réel soit supérieur ou égal à 2, est qu'il soit supérieur ou égal à 3.
4. Pour qu'un réel soit strictement supérieur à 2, il suffit que son carré soit strictement supérieur à 4.
5. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier naturel soit strictement supérieur à 1 est qu'il soit supérieur ou égal à 2.

Exercice 10. Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4$ ...... $x = 2$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = \overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x = \pi$ ...... $e^{2ix} = 1$.

Exercice 11. Donner la négation et la contraposée des propositions suivantes.

1. Si nous mangeons cinq fruits et légumes par jour alors nous sommes en bonne santé.
2. Si une fonction est dérivable alors elle est continue.
3. Si un entier naturel est pair alors il est divisible par 4.

Exercice 12.
Léonard le génie dit à son disciple : « Si demain vous ne vous levez pas avant midi sonnant, je ne vous donnerai pas les dix années de salaire que je vous dois ». Le disciple est ravi, il tient enfin l'occasion d'être rémunéré. Pourtant Raoul (le chat) pense que le disciple va encore se faire arnaquer. Pourquoi ?

Exercice 13. Dans un atelier sont affichés les deux slogans :

1. « *Si chaque ouvrier fait attention à la sécurité, il n'y aura pas d'accident.* »
2. « *Si aucun ouvrier ne fait attention à la sécurité, il y aura des accidents.* »

Ces propositions sont-elles contradictoires ? Equivalentes ?

Exercice 14. On considère un réel x et les deux propositions :
A : « pour tout réel $\epsilon > 0$, $x \leqslant \epsilon$ » et B : « $x \leqslant 0$ ». Montrer que $A \Rightarrow B$.

Exercice 15. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et les deux propositions A : « f est une fonction paire et impaire » et B : « f est la fonction nulle ». Montrer que $A \Leftrightarrow B$.

Exercice 16. Prouver que l'implication suivante est FAUSSE : « Si f est une application continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et si $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ alors $f = 0$ sur $[-1,1]$ ».

Exercice 17. Démontrer l'unicité de la limite d'une suite de réels.

Exercice 18. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les deux propriétés suivantes :

$$P_n \ : \ 3 \text{ divise } 4^n - 1 \qquad \text{et} \qquad Q_n \ : \ 3 \text{ divise } 4^n + 1.$$

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$.
2. Montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Que penser, alors, de l'assertion : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow Q_n)$?

Exercice 19. La suite de Fibonacci est définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

Exercice 20. Montrer par récurrence que $2^n > n^2$ pour tout $n > 4$.

Exercice 21. Claude possède quatre cartes chacune ayant un cercle de dessiné sur une face et un carré sur l'autre face. Il nous présente ces quatre cartes sur une table nous laissant voir qu'une seule des deux faces. Voici ce que l'on observe :

1. un cercle noir,
2. un cercle blanc,
3. un carré blanc,
4. un carré noir.

Claude nous affirme que sur toutes ses cartes, « *si le cercle est noir, le carré dessiné à l'opposé l'est également* ». Pour nous assurer que cette affirmation est vraie, quelle(s) carte(s) devons-nous retourner ?

Exercice 22. Démontrer que pour toute fonction f, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe (g, h) deux fonctions telles que g soit paire, h soit impaire et telles que $f = g + h$.